ÜBER DIE

LEISTUNGSGRENZEN UND EMPFINDUNGSSTÄRKE UNSERES SEHORGANS BEI ABBILDUNG VON FIXSTERNEN UND PLANETEN MIT UND OHNE FERNROHR

INAUGURAL-DISSERTATION

DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
(SEKTION II)
DER K. B. LUDWIG-MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT MÜNCHEN

VORGELEGT AM 5. JULI 1909

VON

AUGUST KÜHL
AUS HEILIGENHAFEN, HOLSTEIN

BUCHDRUCKEREI UND VERLAGSANSTALT CARL GERBER, G. M. B. H., MÜNCHEN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545819_0111

Dem Andenken

meines Vaters!

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 1
I. Zur Geschichte der Tagesbeobachtungen 5
II. Das Auge 11
Der Abbildungsvorgang 18
III. Bildgrösse und Helligkeit:
Allgemeines und Formelzusammenstellung 20
Das Fixsternbild:
Grösse 24
Helligkeit 31
Das Bild einer Lichtscheibe:
Grösse 41
Helligkeit 51
Schluss 54

Nahezu alle Rechnungen, welche über die Leistungsgrenze und Lichtstärke eines Fernrohrs angestellt sind, beziehen sich auf die Verhältnisse in der Objektivbrennebene und sind in ihren Resultaten daher nur anwendbar auf die Photographie (vergl. z. B. die Angaben in: Scheiner „Populäre Astrophysik" S. 274). Nur wenige Autoren haben meines Wissens genügend hervorgehoben, dass das „Sehen" unter Umständen ganz andere Resultate ergeben kann (vergl. z. B. die Zitate in: Strehl „Theorie des Fernrohrs" Kap. XVII). Eine eingehendere Berücksichtigung des Einflusses des Okulars und der Netzhautstruktur des Auges hat, wie es scheint, zuerst Strehl versucht (a. a. O.). Dennoch reichen die von ihm erhaltenen Resultate: S. 130, 9 I u. II[1]) nicht aus, die Beobachtungen zu erklären. Es wird sich vielmehr zeigen, dass hierfür gewisse Hypothesen über die sogenannte Mitempfindung nötig sind.

Zur Klarlegung der Notwendigkeit einer solchen Hypothese ist in der vorliegenden Arbeit möglichst vollständig das bisher bekannte Material über Struktur und Empfindungsweise der Netzhaut, sowie über die Wirkung von Objektiv und Okular zusammengestellt und in Anwendung auf astronomische Zwecke, wo es möglich war, zahlenmässig durchgerechnet. Aufbauend auf diesem Material, beschäftigt sich der übrige Teil der Arbeit mit der Berechnung der Bildausdehnung und Helligkeit von Fixsternen und Planeten bei dunklem und hellem Hintergrunde. Die Mitempfindung konnte dabei nur in ihren extremsten Wirkungen berücksichtigt werden, ja, die Angabe der Bildhelligkeit von Lichtscheiben musste vorläufig bis zur Erlangung der Kenntnis ihrer Wirkung durch experimentelle Untersuchungen aufgeschoben werden.

Insofern bei der Frage nach den Leistungsgrenzen des Auges auch die Möglichkeit von Tagesbeobachtungen der Fixsterne bei unbewaffnetem Auge eine Rolle spielt, musste auch diese Frage in den Rechnungen behandelt werden. Da die Rechnungen nahezu zu völlig verneinenden Resultaten führen, schien es zweckmässig, eine geschichtliche Zusammenstellung solcher Beobachtungen in kritischer Besprechung einzureihen. Diese Übersicht ist, da sie mit dem übrigen Inhalt nur in losem Zusammenhang steht, in dem Abschnitt I vorangestellt.

Abschnitt I.

Zur Geschichte der Tagesbeobachtungen.

In der frühesten Zeit menschlicher Erkenntnis war die Frage nach der Sichtbarkeit der Sterne bei Tage eine Frage nach der Konstitution des Universums, denn für den denkenden Geist bedurfte die eigentümliche Tatsache des nahezu gleichzeitigen Verschwindens aller Sterne bei

[1]) I „Bei gleicher und zwar stärkerer Gesamtvergrösserung zeigt ein Fernrohr von halber Öffnung die Sterne nicht nur 4mal, sondern bis zu 16mal so schwach als ein anderes Normalfernrohr, weil es nicht allein bloss 4mal so wenig Licht empfängt, sondern dieses auch noch auf eine 4mal so grosse Fläche der Netzhaut ausbreitet, welche die Fläche eines Retinaelementes im allgemeinen vielfach übertrifft."

II „Bei unveränderter Öffnung nimmt die Helligkeit eines Sternbildes mehr und mehr mit dem Quadrate der Vergrösserung ab, insofern man diese nach und nach wachsen lässt."

Sonnenaufgang und ihres Aufleuchtens nach Sonnenuntergang einer eingehenden natürlichen Erklärung. Die seltenen totalen Sonnenfinsternisse und ein genaues Studium des Sternenhimmels bei Mondschein überzeugten den Menschen bald, dass die Sterne am Tage ebenso leuchten wie in der Nacht, dass sie jedoch von dem hellen Tagesgestirn völlig „überstrahlt" und dadurch im allgemeinen den Blicken entzogen werden. Mit dieser Erkenntnis war natürlich die Frage nicht abgetan, sondern trat in eine neue Phase. Wenn die Sterne auch während des Tages leuchten, musste es unter günstigen Umständen möglich sein, wenigstens die hellsten zu erblicken, sei es nun mit völlig ungeschütztem Auge, sei es unter Anwendung geeigneter Hilfsmittel. So wurde die Frage ihrem Ziel nach umgewandelt in eine Frage nach der Leistungsfähigkeit des Auges und nach der Zweckmässigkeit der zur Unterstützung des Auges herangezogenen Hilfsmittel. Eine Zusammenstellung der geschichtlichen Berichte über Tagesbeobachtungen gibt daher einen Überblick über die Entwicklung der „optischen" Hilfsmittel, gestattet, die Leistungsfähigkeit jener Hilfsmittel vom heutigen Standpunkt aus einer Kritik zu unterziehen und gibt somit Veranlassung, näher auf die Bedingungen für Tagesbeobachtungen einzugehen.

Das Absuchen des Tageshimmels mit ungeschütztem Auge oder mit langen Beobachtungsrohren, die schon sehr frühzeitig im Gebrauch waren, scheint ergebnislos gewesen zu sein (Humboldt, Kosmos Bd. 3 A *α* II S. 61). Vielleicht hat der Wunsch, ein möglichst gewaltiges Beobachtungsrohr zu besitzen, vielleicht der Zufall den Menschen dazu geführt, den Tageshimmel vom Grunde tiefer Schächte oder aus dem Dunkel enger Höhlen aufmerksam zu betrachten.

Aristoteles führt in seiner Schrift „de generatione Animalium" V,1 nahezu als etwas Selbstverständliches an: „So kommt es ja auch vor, dass die, welche in Erdgewölben und Zisternen sich befinden, von da aus bisweilen Sterne sehen." Der Ausspruch scheint auf einem allgemein verbreiteten Gerücht zu beruhen, wenn er nicht gar, was im Zusammenhang der Darstellung keineswegs ausgeschlossen erscheint, lediglich das Ergebnis philosophischer Deduktion ist.

Der Bericht des Plinius (lib. II cap. 14): „Die Sterne werden bei Tage wegen des Sonnenlichts nicht gesehen, obwohl sie gleich wie in der Nacht leuchten, wie die Sichtbarkeit bei einer Sonnenfinsternis und aus tiefen Brunnen beweist" — scheint auf die vorige Quelle zurückzugehen.

Arago schreibt darüber in der „Astronomie populaire": „Vielleicht hat der berühmte Philosoph, seiner Gewohnheit folgend, die Beobachtung dem Aristoteles entnommen, ohne sie zu verifizieren. Jedenfalls scheint mir, dass Plinius nicht als Gewährsmann für die Erscheinung gelten kann."

Durch den Ausspruch des Aristoteles war offenbar die Frage für die Gelehrten späterer Zeit entschieden; jedenfalls sind erst wieder von der Zeit ab, da der Einfluss des grossen Philosophen ins Wanken geriet, neue Nachrichten über entsprechende Versuche vorhanden. In jene Zeit fällt allerdings zugleich die Erfindung des Fernrohrs, des gewaltigsten Hilfsmittels der modernen Astronomie und die Frage nach der Leistungsfähigkeit des unbewaffneten Auges verlor an Interesse. Die weiteren Erzählungen beruhen daher in der Regel auf zufälligen und gelegentlichen Beobachtungen.

Scheiner schreibt in der „Rosa ursina" (1630), ihm habe ein sehr glaubwürdiger Spanier erzählt, dass in seiner Heimat in tiefen Brunnen

mit freier Öffnung der Himmel und die Sterne, „indem sie durch Reflexion wie in einem Spiegel leuchten", selbst um die Mittagszeit sehr deutlich gesehen würden. Durch die hohe Absorptionskraft des Wassers wird die Gesamthelligkeit des Bildes sehr herabgemindert und dadurch für die Unterschiedsempfindlichkeit des Auges eine günstigere Bedingung geschaffen; andrerseits erweitert sich in der geringeren Helligkeit die Pupille des Auges und verstärkt durch eine Veränderung des Beugungsbildes des Fixsterns den tatsächlichen relativen Helligkeitswert des Sterns. Die Versuchsanordnung stellt also wirklich ein „optisches" Hilfsmittel dar, auf dessen Leistungsfähigkeit später zurückzukommen ist.

Nach Prévost d'Exiles „Histoire générale des voyages" sollen in tropischen Gegenden Sirius und Canopus mit blossem Auge trotz der Sonne gesehen werden können. Auch Lalande erwähnt in seiner „Astronomie" bei Besprechung der Dämmerungserscheinungen, dass La Nux den Sirius auf der Insel Bourbon am hellen Tage oft gesehen habe.

Der berühmte Geometer Cardanus behauptete gar, er sähe am Tage den Himmel ebenso mit Sternen besät wie zur Nachtzeit. Da er sich jedoch u. a. auch die Fähigkeit zuschrieb, zu hören, was in seiner Abwesenheit über ihn gesprochen würde, so ist wohl seine Behauptung kaum ernst zu nehmen.

J. Herschel erzählt in den „Outlines of Astronomy", ein ihm bekannter, berühmter Optiker (nach Humboldt und Arago war es der Optiker Troughton) sei dadurch für die Astronomie interessiert, dass er in seiner Jugend durch einen Kamin mehrere Tage nach einander zur bestimmten Stunde einen hellen Stern gesehen habe.

Ebel berichtet (1793) in seiner Schrift „Anleitung, auf die nützlichste und genussvollste Art die Schweiz zu bereisen", man könne aus dem 220 m tiefen Brunnen „Bouillet" in den Salinen von Bex am hellen Mittag Sterne sehen. Dieses Gerücht veranlasste im Jahre 1851 den Züricher Astronomen R. Wolf, den Direktor der Salinen, v. Charpentier, um nähere Auskunft zu bitten. Dieser schrieb, weder er noch eine Reihe seiner Aufsichtsbeamten hätten trotz vieler Versuche in verschiedenen Jahren und bei sehr klarem Wetter jemals einen Stern am Tage gesehen aus dem einzigen Schacht der Salinen, der direkt zu Tage gehe. Übrigens habe er ganz kürzlich erfahren, dass die Arbeiter, welche die Fremden in den Gruben herumführten, diesen das Märchen vom Sternesehen erzählten, um ihnen den Schacht recht interessant zu machen und sich über deren Leichtgläubigkeit zu freuen.

B. de Saussure gibt an, — auf Grund der Erzählungen seiner Führer — vom Gipfel des Mont Blanc aus seien Sterne am Tage zu sehen, wenn der Beobachter gehörig im Schatten stehe; er selber habe allerdings nie daran gedacht, die Beobachtung nachzuprüfen.[1])

R. Wolf in Zürich veröffentlichte 1875 einen Brief eines Herrn Carpentier, in welchem dieser mitteilt, er habe als zehnjähriger Knabe in Burg bei Magdeburg von der Sohle eines 90 Fuss tiefen Brunnens am Tage einige Sterne gesehen.

Diesen Berichten stehen fast ebenso viele andere entgegen, in denen von völliger Ergebnislosigkeit der Versuche gesprochen wird. A. von Humboldt hebt besonders hervor, dass er sich während seiner jahre-

[1]) Nach Fertigstellung der Arbeit fand ich in Arrhenius Kosm. Physik noch die Bemerkung, dass bei hohen Ballonfahrten Sterne bei Tage gesehen worden seien (leider ohne Angabe der Quellen).

langen Tätigkeit als praktischer Bergmann oft bei günstigem Wetter bemüht habe, Sterne aus tiefen Schächten zu erblicken, aber nie Erfolg gehabt habe, dass er auch in mexikanischen, peruanischen und sibirischen Bergwerken nie einen Menschen getroffen habe, der vom Sternesehen bei Tage auch nur gehört hätte.

Der vorhin erwähnte Herr v. Charpentier führt ausser seinem Misserfolg in den Salinen von Bex an, er habe auch nie in einer der vielen von ihm besuchten Gruben in Sachsen, Schlesien, Frankreich usw. Sterne bei Tage gesehen, noch erzählen hören, dass es möglich sei.

Die Bemühungen der Gebrüder Schlagintweit bei der Durchforschung der östlichen Alpen und die Versuche Humboldts und seines Freundes Boussingault in den Kordilleren von Mexiko, Quito und Peru, von einem hohen Gipfel aus Sterne bei Tage zu sehen, waren stets ergebnislos.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass nach Angaben Reslhubers im „Sirius" die Mündung des vielgenannten Schachtes von Kremsmünster zu eng ist, als dass man die helleren Zenithsterne vom Boden aus erblicken könnte.

Ebenso sind eigene Versuche mit einem ca. 3 m langen, innen geschwärzten Rohr von ca. 12 cm Öffnung, das am grossen Refraktor der Münchener Sternwarte parallel zum Sucher orientiert wurde, ergebnislos verlaufen, obwohl durch Einhüllen des Kopfes in ein schwarzes Tuch jedes Nebenlicht ausgeschaltet wurde.

Die Sichtbarkeit von Sternen am Tage ohne Benutzung eines Fernrohrs ist also eine höchst seltene Erscheinung. Wenn auch bei einigen Berichten, namentlich soweit sie von unkundigen Leuten herrühren, zweifelhaft bleiben mag, ob nicht der vermeintliche Fixstern der Planet Venus war, oder in anderen Fällen, in denen es sich um Beobachtungen in frühester Jugend handelt, nicht entschieden werden kann, ob nicht optische Täuschungen vorliegen, so sind doch einige Angaben (z. B. von la Nux) zu bestimmt, als dass man ihnen mit Zweifel begegnen könnte. A. v. Humboldt schliesst daher seine Betrachtungen mit der Bemerkung: „Erscheinungen, deren Sichtbarkeit von dem zufälligen Zusammentreffen begünstigender Umstände abhängt, müssen nicht darum geleugnet werden, weil sie so selten sind." Auf die Art der begünstigenden Umstände wird am Schluss dieses Abschnittes und im Abschnitt III näher einzugehen sein.

Ganz anders wie mit der „natürlichen"[1]) Sichtbarkeit von Fixsternen am Tage verhält es sich mit der Sichtbarkeit von Planeten. Berichte über solche Erscheinungen erregen auch keinerlei Zweifel, weil die Tagessichtbarkeit des Planeten Venus zur Zeit ihres grössten Glanzes eine allgemein bekannte Tatsache ist. Der Vollständigkeit halber mögen die auffälligsten Erscheinungen hier erwähnt werden.

Der römische Schriftsteller Varro erzählt, dass Äneas auf der Fahrt von Troja nach Italien den Planeten Venus beständig trotz des Sonnenlichts gesehen habe.

1716 wurde die Venus von der ganzen Bevölkerung Londons am hellen Tage gesehen. Die Erscheinung veranlasste Halley, die Zeiten des grössten Glanzes des Planeten zu berechnen.

1750 wurde der Planet nach Angabe Lalandes in Paris von jedermann am Tage bemerkt.

[1]) „Natürliches Sehen" nennt Humboldt das Sehen mit blossem Auge zum Gegensatz vom „teleskopischen Sehen."

Arago gibt auf Grund einer Erzählung Bouvards eine ebenso auffällige Sichtbarkeit der Venus zur Zeit des Direktoriums an.

Im X. Band des Sirius findet sich die Mitteilung eines Herrn Pastor Zehn, er habe im Jahre 1881 in Posen die Venus vom 12. März bis 20. April und vom 16. Mai bis 2. Juli an jedem klaren Tage um die Mittagszeit mit blossem Auge gesehen.

Endlich erzählte mir ein Bekannter, Herr cand. phil. Gruber, er habe Anfang Oktober 1908 vom Gipfel eines 3000 m hohen Berges um die Mittagszeit die Venus mit blossem Auge bemerkt.

Über Beobachtungen an anderen Planeten vermochte ich nur die Bemerkung A. v. Humboldts zu finden, er habe unter dem ätherreinen Himmel von Cumana in der Ebene des Litorals mehrmals und leicht, nach Beobachtung von Trabantenverfinsterungen, Jupiter mit blossem Auge wieder aufgefunden und deutlichst gesehen, wenn die Sonne 18—20° über dem Horizont stand.

Es ist schon bemerkt, dass bald nach der Erfindung des Fernrohrs (1608) die Frage der natürlichen Sichtbarkeit der Sterne bei Tage für den Astronomen nahezu alles Interesse verlor, da es durch das Fernrohr ermöglicht wurde, die Sterne ohne vorherigen Anschluss an die Venus[1]) direkt an die Sonne anzuschliessen. Gewöhnlich wird der französische Astronom Morin als der Entdecker jener wunderbaren Fähigkeit des Fernrohrs bezeichnet, doch weisen die Geschichtszahlen auf eine Reihe von Vorläufern hin. Am 1. März 1611 sah J. Gautier in Aix in der Provence den Planeten Merkur nach Sonnenaufgang im Gesichtsfeld seines Instruments.

Am 18. August sah van den Hove (Hortensius) de Delft den Planeten Venus nach Sonnenaufgang.

Am 2. März 1632 sah Curtius den Stern α Scorpii trotz leichten Nebels am hellen Tage.

Galilei verfolgte 1632 den Sirius während eines ganzen Tages.

Erst Ende März 1635 gelang Morin dieselbe Entdeckung.

Wie betroffen und erfreut man über die Leistungsfähigkeit des Fernrohrs nach dieser Richtung war, das zeigt am besten Morins übertriebene Erzählung. Er schreibt:

„Ich hatte eine so grosse Freude darüber, dass ich fast das Fernrohr und meine übrigen Instrumente umgestossen hätte."

Und an anderer Stelle:

„Eines Tages beobachtete ich die Trabanten des Jupiter, als ein Himmelsbote mir erschien und mir sagte: Warum ermüdest Du unnötig Deine Augen, indem Du mit dem Instrument den Mond, die Sonne und den Jupiter beobachtest. Lass doch andern das Vergnügen! Wende Dich nützlicheren Dingen zu, für welche Du vom Himmel auserwählt bist. Wenn Du meinem Rate folgst, ist Dir ewiger Ruhm gewiss, denn Du wirst am hellen Tage die Planeten und helleren Fixsterne sehen, deren Anblick den Sterblichen bisher nur zur Nachtzeit vergönnt war."

Morin scheint allerdings zuerst die Tragweite der neuen Entdeckung erkannt zu haben, denn er äusserte die Ansicht, dass die Tagesbeobach-

[1]) Tycho Brahe vollbrachte 1582 eine umfangreiche Arbeit über die Positionen der Fixsterne, indem er durch Nachtbeobachtungen ihre Orte auf die Venus bezog und die Venus durch Tagesbeobachtungen an die Sonne anschloss.

tungen für Längenbestimmungen auf dem Meere wichtig werden könnten, doch hat er selber seine Entdeckung nie praktisch ausgenutzt[1]).

Der ausserordentlichen Langsamkeit in der Verbreitung wissenschaftlicher Veröffentlichungen ist es offenbar zuzuschreiben, dass etwa 42 Jahre später der Engländer R. Hooke die Priorität der teleskopischen Tagesbeobachtungen für sich in Anspruch nahm.

Das Verdienst, die Tagesbeobachtungen zuerst wissenschaftlich ausgenutzt zu haben, gebührt unstreitig Piccard, der am 3. Mai 1669 an einer Tagesbeobachtung des Regulus die „lichtverdichtende" Wirkung des Fernrohrs vermeintlich als Erster entdeckte.

In der Folgezeit verbreitete sich die Kenntnis der Eigenschaften des Fernrohrs schnell allgemein, doch die Ursache der „Lichtverdichtung" hat noch lange mancherlei Zweifel erregt. Humboldt schreibt z. B., dass Bessel in seinem Briefwechsel mit ihm oft darauf zurückkam und bekannte, keine ihn ganz befriedigende Lösung finden zu können.

Als besonders merkwürdige Beobachtungen, denn im allgemeinen reicht die teleskopische Tagessichtbarkeit nicht sehr weit, sei hier angeführt, dass Struve und Wrangel[2]) den Begleiter des Polaris (9^m) am hellen Tage sahen, dass von Encke und Argelander[3]) ähnliche Beobachtungen gemacht sein sollen.

Die zur Erklärung der natürlichen und teleskopischen Tagessichtbarkeit der Gestirne von Humboldt gegebenen Ausführungen schliessen sich eng an die Untersuchungen Aragos an. Ein grosses Gewicht kommt natürlich den besonderen atmosphärischen Bedingungen zu, insbesondere der möglichsten Armut der Luft an Staub- und absorbierenden Wasserdampfteilchen, wie sie etwa an hochliegenden Beobachtungsorten und zum Teil in den Tropen anzutreffen ist. Einen erheblichen Einfluss misst Arago weiterhin der Abblendung des diffusen Tageslichts durch Anwendung von Schutzrohren oder bei Beobachtungen aus Schächten und Höhlen zu. Um den Wert dieses Arguments nachzuprüfen, richtete ich das vorhin erwähnte Schutzrohr an verschiedenen Tagen auf beliebige Stellen des Himmels und suchte durch plötzliches Seitwärtsbeugen des Kopfes die Helligkeit des frei gesehenen Himmelsgrundes mit der Helligkeit des im Gesichtsfelde des Schutzrohrs gesehenen Ausschnitts zu vergleichen. Dabei ergab sich, dass der Himmelsgrund durch das Schutzrohr gesehen eher heller erschien, als ohne Schutzrohr. Die Erscheinung ist offenbar auf den Kontrast gegen die geschwärzten Wände des Rohrs zurückzuführen, denn die Kopfbewegungen wurden möglichst schnell gemacht, um Erweiterung bezw. Verengerung der Pupille bei der Schätzung auszuschalten. Ebenso ergab die Anwendung des Schutzrohrs auf die Relativhelligkeit des Planeten Venus, während die Sonne noch etwa 5^0 über dem Horizont stand, keinerlei merkbaren Einfluss. Demnach scheint m. E. der Einfluss des diffusen Tageslichtes im Verhältnis zur Helligkeit des Hintergrundes — und nur das Verhältnis kommt bekanntlich für die Empfindung in Frage — so gering, dass man ihn unbedenklich vernachlässigen kann. Die weitergehenden Betrachtungen Aragos gründen sich auf die Gesetze der geometrischen Optik;

[1]) Erst neuerdings scheint in der Navigation auf diese Möglichkeit zurückgegriffen zu werden (vergl. Sirius 1910 Heft 7 S. 152 Beob. v. Sternen bei Tage).

[2]) Jahrbuch v. H. C. Schumacher, Stuttgart 1839 S. 100.

[3]) Nach Houzeau „Vademecum de L'Astronome" ist die Angabe in: Humboldt, Cosmos III, 1852 S. 77, französ. Ausgabe.

der Einfluss der Diffraktion und Interferenz kann nach Aragos Ansicht die Ergebnisse der geometrischen Optik nur unwesentlich verändern. (Astr. pop. S. 201 Bd. I).

Durch die Arbeiten von Schwerdt, André, Struve, Strehl u. a. ist inzwischen der Einfluss der Beugung eingehend erörtert; durch neuere medizinische Forschungen ist die Kenntnis des Baues der Netzhaut des Auges wesentlich gefördert; die Untersuchungen von Mach und v. Seeliger haben einen tieferen Einblick in die Gesetze der Lichtempfindung gegeben. Daher ist die Frage nach der Leistungsgrenze des Auges und des Fernrohrs heute von wesentlich andern Gesichtspunkten zu betrachten, als es Arago u. Humboldt getan haben.

Literatur:

John Herschel, Outlines of Astronomy 1850 § 61.
Lalande, Astronomie 1792 Bd. II S. 556.
Mitteilungen d. nat. forschd. Gesellschaft in Bern 1851 S. 159.
Vierteljahrsschrift d. nat. forsch. Ges. in Zürich 1875 S. 179.
Arago, Astronomie populaire { Livre V Cap. VI—IX. / Livre XIX Cap. IX.
A. v. Humboldt, Kosmos Bd. III Fixsternhimmel Abschn. II.
Sirius, Neue Folge Bd. X S. 240.

Abschnitt II.

Das Auge.

In der Astronomie wird die Leistungsfähigkeit des Auges nach verschiedenen Richtungen aufs äusserste in Anspruch genommen. Die Ablesung der Teilkreise der Instrumente verlangt eine genaue Entfernungsschätzung, falls die letzte Ablesung an einer Mikrometertrommel geschieht, eine minutiöse Breitenwahrnehmung bei Nonienablesungen. Die Photometrie fordert möglichst genaue Farbenangabe und Merkbarkeit geringster Helligkeitsunterschiede. Die Doppelstern-Astronomie stellt hohe Anforderung bezüglich der Wahrnehmung kleinster Intervalle und die Planetenkunde endlich sucht auch die Formangabe sehr kleiner Objekte zu leisten. Alle diese Ansprüche lassen sich nur bis zu gewissen äussersten Grenzen verwirklichen, welche bedingt sind durch anatomische, physiologische und psychologische Eigentümlichkeiten unseres Sehapparates einerseits und durch die Wellennatur des Lichts andrerseits.

Die Entfernungsschätzung hängt ihrer Sicherheit nach vor allem von den Funktionen der Bewegungsmuskeln des Auges ab, wie Mach in der „Analyse der Empfindungen“ (S. 84 u. f. S. 158, 161) ausführt. In den folgenden Ausführungen, die sich hauptsächlich mit den im Bau der Netzhaut und in der Beugung des Lichts begründeten Grenzen befassen, bleiben jene Eigenschaften des Auges unberücksichtigt. Ebenso wird die Merkbarkeit kleinster Helligkeitsunterschiede nur in soweit berührt, als es sich um Sichtbarkeit eines Objekts überhaupt handelt.

Wegen der beständigen Verwendung der Resultate der von v. Kries und anderen begründeten Duplizitätstheorie des Auges sei es gestattet, die Grundzüge dieser Theorie kurz zu rekapitulieren. Als Grundlage der Ausführung dient der Aufsatz von H. Piper: „Über die Funktionen der Stäbchen und Zapfen und über die physiologische Bedeutung des Sehpurpurs“ („Medizinische Klinik“ 1905 No. 25 u. 26).

Die Netzhaut besteht aus einem enggefügten Mosaik kleinster Teilchen, den Zapfen und Stäbchen. In der Netzhautgrube, der Stelle

des schärfsten Sehens, finden sich nur Zapfen; an der Peripherie dieser Stelle beginnen die Zapfen von Stäbchen untermischt zu werden, und in grösserer Entfernung sind nur noch Stäbchen vorhanden. Der Stäbchenapparat vermag seine Empfindlichkeit für kleinste Reize im Dunkelaufenthalt erheblich zu steigern und wird daher kurz als der „Dunkelapparat" des Auges bezeichnet. In den ersten zehn Minuten des Aufenthaltes im Dunkeln sinken die Schwellenwerte des Reizes langsam, dann sehr schnell und erreichen nach etwa einer halben Stunde ihr Minimum. Das Minimum beträgt beiläufig im Mittel etwa $\frac{1}{6000}$ des Schwellenwertes des Auges bei heller Beleuchtung.

Der Zapfenapparat vermag seine Empfindlichkeit nicht zu variieren — bei sehr starker Beleuchtung tritt allerdings Ermüdung ein (Blendung), doch stellt er sich nach 3—5 Minuten in mässiger Beleuchtung wieder auf seine Normalempfindlichkeit ein. Da der Schwellenwert des Zapfenapparates erheblich grösser ist als der des Stäbchenapparates, so vermag er sein Optimum nur bei hellem Licht zu leisten und wird deshalb der „Hellapparat" des Auges genannt.

Im Gegensatz zu seiner grossen Empfindlichkeit ist der Stäbchenapparat total farbenblind und reagiert auf Licht der verschiedensten Wellenlängen nur mit verschiedenen Abstufungen der Weissempfindung [Grauglut — man bezeichnet z. B. eine Mondscheinlandschaft direkt als Stäbchenlandschaft.] Das Maximum der Empfindlichkeit zeigen die Stäbchen für Licht von der Wellenlänge **530—500** $\mu\mu$, während das Empfindlichkeitsmaximum des Hellapparates für Licht der Wellenlänge **600—580** $\mu\mu$ eintritt. Der Umstand, dass beide Maxima und daher die ganzen Empfindlichkeitskurven gegeneinander verschoben sind, veranlasst die eigentümliche Erscheinung des Purkinjeschen Phänomens. Die Erscheinung macht sicht natürlich beim Übergang von heller zu schwacher Beleuchtung nicht momentan geltend. Eine an sich sehr gesättigte Farbe wird bei abnehmender Intensität infolge der sich einmischenden Stäbchenfunktion einen geringeren Sättigungsgrad anzunehmen scheinen und eine milchige Färbung erhalten entsprechend der eigenartigen Weissempfindung der Stäbchen. Bei weiter abnehmender Intensität verschwindet schliesslich die spezifische Farbenempfindung ganz; das Objekt erscheint in einem weissgrünen Licht, dem Stäbchenweiss. Wenn das Objekt verschiedenfarbiges Licht ausstrahlt oder mehrere Objekte von verschiedener Farbe vorliegen, so verschwinden bei einem solchen Auslöschverfahren, entsprechend der verschiedenen Empfindlichkeit der Zapfen für verschiedene Wellenlängen, zunächst die kurzwelligen blauen und langwelligen roten Strahlen für die Farbenempfindung; am längsten wird Licht mittlerer Wellenlänge [ca. **590** $\mu\mu$ (gelb)] als farbig empfunden. Daher wird man beim Vergleich der Helligkeiten verschiedenfarbiger Sterne mit Hilfe eines Keilphotometers einen gelben Stern gegenüber einem roten oder blauen stets zu hell schätzen, und zwar um so mehr, je schwächer die Objekte sind. Die Angabe Kobolds in: „Der Bau des Fixsternsystems" S. 27 u. 28: „Eine Abschwächung der Lichtquelle, die an sich eine Änderung der Farbe nicht bewirken kann, erzeugt für das Auge doch stets eine Zunahme der Rotfärbung. Rot gefärbte Sterne verschwinden für das Auge später als Sterne geringeren Farbengrades (nach der Schmidtschen Skala) wir schätzen sie deshalb mit dem Glaskeilphotometer zu hell" — dürfte

daher nicht zutreffend sein. Die bei dem Auslöschverfahren an irdischen Lichtquellen tatsächlich beobachtete Zunahme der Rotfärbung beruht nach Ebert [„Über den Einfluss der Schwellenwerte der Lichtempfindung auf den Charakter der Spektra." Wiedem. Ann. XXXIII S. 136 u. f.] auf dem starken Überwiegen des Rot in den Lichtquellen. Über den Einfluss des Purkinjeschen Phänomens auf die Helligkeitsschätzung finden sich Angaben in der photom. Durchmusterung von Müller & Kempf (Publik. d. astrophys. Obs. zu Potsdam Bd. IX, XIII, XIV, XVII). Aus den obigen Angaben folgt für die Astronomie weiter, dass schwache Sterne unter allen Umständen zu gelb bezw. zu weiss gesehen werden und dass ganz schwache Objekte stets ohne spezifische Farbe (stäbchenweiss) erscheinen. Eine Farbenschätzung schwacher und schwächster Objekte ist demnach u n m ö g l i c h.

Farbenschätzungen an Fixsternen mit verschieden lichtstarken Instrumenten müssen daher ebenso wie die Helligkeitsmessungen verschiedene Resultate ergeben. (Vergl. Publ. der astr. Obs. zu Potsdam Bd. XIII u. XVII.)

Wenden wir uns nunmehr den Leistungsgrenzen des Auges bezüglich der Definition der Bilder in der Empfindung zu. Für die folgenden Angaben soll zunächst von dem Einfluss der Beugung des Lichts ganz abgesehen werden, um den Einfluss des Baues der Netzhaut rein hervortreten zu lassen. Während die Stäbchen bündelweise auf eine gemeinsame Nervenleitung angewiesen sind und daher schon — abgesehen von der schlechteren Definition der Netzhautbilder in grösseren Entfernungen von der fovea centralis — keiner grossen Wahrnehmungsschärfe fähig sind, ist jeder Zapfen einzeln durch eine Nervenfaser mit dem Empfindungszentrum in Verbindung. Jedes Zapfenelement kann daher individuell als hell oder dunkel empfunden werden und zwar so, dass, wenn ein einziger Punkt eines Zapfenquerschnitts mit genügender Intensität beleuchtet wird, die ganze Zapfenquerschnittsfläche als hell empfunden wird. [Vergl. Helmholtz Physiol. Optik S. 255.) Dieser Satz von der individuellen Empfindungsfähigkeit jedes Zapfens erleidet eine Einschränkung durch die von Mach hervorgehobene Tatsache der Mitempfindung [Analyse der Empfindungen S. 163], doch spielt diese Eigenschaft hier zunächst keine Rolle. Nach L. Heine [Winkelmann Handb. d. Optik S. 271] ist das Schema der Zapfenanordnung ein Mosaik regelmässiger Sechsecke, deren Durchmesser (a) nach Helmholtz schwankt zwischen **0.0015**—**0.0054** mm; als Mittelwert setzt Helmholz a = **0.003** mm.

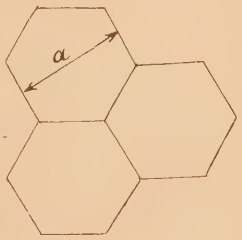

Fig. 1.

Damit zwei Lichtpunkte noch getrennt gesehen werden können, ist offenbar nötig, dass ihre Netzhautbilder durch ein ungereiztes Zapfenelement getrennt sind. Dieselbe Forderung ist zu erfüllen für die Trennbarkeit zweier paralleler Striche. Da nun einer Bildausdehnung von **3** μ auf der Netzhaut ein Sehwinkel von **39″.9** entspricht, so folgt, dass Fixsterne oder parallele Gerade nur getrennt werden können, wenn ihr Abstand grösser ist als **40″**. Die empirischen Werte werden gemäss der individuellen Verschiedenheit der Augen von diesem Mittelwert nach beiden Seiten abweichen. Tatsächlich gibt Hooke für den Minimalabstand der Komponenten eines Doppelsterns **30″** an; E. H. Weber fand, dass zwei Striche noch getrennt werden können, wenn ihr Abstand **73″**

beträgt; Helmholtz fand für seine eignen Augen den Wert **64″**. [Vergl. Helmh. Phys. Opt. S. 256 u. f.] W. Foerster [„Sur le rapport entre le grossissement des microscopes et la précision des mesures micrométriques". Procès-Verbeaux des Séances de 1878] fand als minimalste Breite für das Netzhautbild einer Lichtlinie zwischen dem Teilstrich eines Kreises und einem Mikrometerfaden **2.5** μ d. h. den Sehwinkel **33″.3** mit einem mittleren Fehler von **0.37** μ [wahrsch. F **0.25** μ]. Die empirischen Daten ergeben also im Mittel **50″**; die Abweichung von dem errechneten Mittelwert liesse sich ohne Zuhilfenahme der Beugungstheorie zwanglos erklären durch die geringe Zahl der vorliegenden Werte, weiter aber auch durch die Vermutung, dass die Werte von Helmholtz und Weber die Breite der Striche mit enthalten, denn die Entfernungsangabe bezieht sich doch jedenfalls auf die Entfernung der Strichmitten.

Erheblich verschieden von dieser Wahrnehmungsgrenze ist die sogenannte Heringsche Schärfe der Breitenwahrnehmung. (Winkelmann, Handb. d. Optik S. 271.) Man versteht darunter die Genauigkeit, mit der das Auge zu beurteilen vermag, ob zwei gegen einander gerichtete Striche in eine Gerade fallen — eine Aufgabe, die bei Nonienablesungen beständig zu leisten ist. Empirisch fand Hering für die Einstellungsschärfe eines Nonius **12″—10″** und Pulfrich **10″**. Stellt man sich das Heinesche Zapfenschema mit senkrechter Anordnung der Elemente her, so erhält man leicht als geringsten Abstand der Striche den halben Radius des dem Sechseck umgeschriebenen Kreises. Da nun $\frac{r}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, so beträgt die Schärfe der Breitenwahrnehmung für mittlere Zapfenbreite **0.29** des oben angegebenen Trennungsvermögens. Der errechnete Wert von **40″** ergibt demnach die Breitenwahrnehmung zu **11″.6** in guter Übereinstimmung mit den beobachteten Werten, während das empirische Mittel (**50″**) den etwas zu grossen Wert **14″.5** gibt. Die oben ausgesprochene Vermutung über die Angaben von Weber und Helmholtz scheint sich also zu bestätigen. Wichtig erscheint jedenfalls, hervorzuheben, dass die auf Grund der geometrischen Optik errechneten Leistungsgrenzen des Auges mit den empirischen Daten völlig übereinstimmen. Die Leistungsgrenze des unbewaffneten Auges und ebenfalls die des bewaffneten Auges, so lange die Normalvergrösserung[1]) des Fernrohrs nicht überschritten wird, scheint somit nur von dem Bau der Netzhaut, nicht aber durch die Beugung des Lichts veranlasst zu sein.

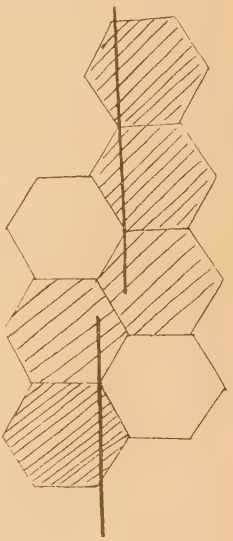

Fig.

Für die Wahrnehmung der Gestalt kleinster Objekte folgt weiter aus dem Bau der Netzhaut, dass jedes besondere Merkmal der Gestalt verschwindet, sobald das Objekt einen kleineren angularen Durchmesser hat als dem Durchmesser eines Zapfenelements entspricht (**40″**). Irgend welche empirische Daten vermochte ich nicht aufzufinden, doch scheint mir die Schwierigkeit, mit der sehr gute Augen die Sichelform der Venus zu erkennen vermögen, der Angabe wenigstens nicht zu widersprechen.

[1]) Normalvergrösserung ist jene Okularvergrösserung genannt, welche den Querschnitt des aus dem Fernrohr austretenden Lichtbündels auf die Grösse der Augenpupille reduziert. (Vergl. Anm. S. 20, 2).

Da die geometrische Optik die punktförmige Abbildung in der Nähe des Brennpunktes antezipiert, so könnte man durch Benutzung eines Fernrohrs bei fortwährender Steigerung der Okularvergrösserung die angegebenen Grenzen beliebig verringern. In Wirklichkeit liegen die Verhältnisse wegen der Beugung des Lichts nicht so einfach. Es scheint daher geboten, zu untersuchen, ob die Grenzen der Wahrnehmungsschärfe nicht nur scheinbar vom Zapfendurchmesser abhängen — in Wirklichkeit aber durch die Beugung veranlasst sind. Dabei ist stets vorausgesetzt, dass es sich um Beobachtung mit blossem Auge oder bei Benutzung eines Fernrohrs um Okularvergrösserungen handelt, die kleiner oder gleich der Normalvergrösserung sind. Um die Ausführungen hier nicht zu schwerfällig zu gestalten, werden die Formeln aus späteren Abschnitten zunächst ohne Nachweis entnommen.

Der Radius der mittleren Beugungsscheibe einer punktförmigen Lichtquelle auf der Netzhaut des Auges ergibt sich aus der Theorie zu:

$$\varrho = f \cdot \frac{1.22\,\lambda}{2\,p}\ 206\,265\ \text{mm}$$

Hierin ist $f = 15$ mm die hintere Knotenweite des (reduzierten Auges) λ die Wellenlänge des Lichts [$= 589\ \mu\mu$], p der Radius der Augenpupille [$= 2{,}5$ mm].

$$\varrho = 0.002156\ \text{mm}$$

Der Durchmesser des Beugungsscheibchens beträgt also 4,3 μ, während der Zapfendurchmesser 3 μ beträgt. Fällt der Mittelpunkt des Beugungsscheibchens in das Zentrum des Zapfensechsecks, so entfällt auf den dem Sechseck eingeschriebenen Kreis vom Radius 3 μ die Lichtmenge

$$m' = 4\,A^2\,\lambda^2\,p_0^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{30}{43}u'} \frac{J_1^{\,2}(u)}{u}\,du$$

während das ganze erste Beugungsscheibchen die Energiemenge enthält:

$$m = 4\,A^2\,\lambda^2\,p_0^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{u'} \frac{J_1^{\,2}(u)}{u}\,du$$

Hieraus folgt:

$$\frac{m'}{m} = \frac{\int_0^{\frac{30}{43}u'} \frac{J_1^{\,2}(u)}{u}\,du}{\int_0^{u'} \frac{J_1^{\,2}(u)}{u}\,du}$$

Die obere Grenze $u' = 1.220 \cdot \pi$ ist der Radius des Beugungsscheibchens in „optischen Einheiten“[1]; $\frac{30}{43}u'$ ist der Radius des dem Zapfenelement eingeschriebenen Kreises in denselben Einheiten. $J_1(u)$ ist die Besselsche

[1]) Als Masszahl in „optischen Einheiten“ ist immer die Zahl $u = \frac{2\,\pi\,p}{\lambda\,k} \cdot \varphi$ mm bezeichnet. Hierin bedeutet:
p den Pupillenradius,
λ die Wellenlänge,
k die hintere Knotenweite des Auges,
φ mm eine Längenabmessung von φ mm auf der Netzhaut.
(Vergl. S. 22).

Funktion erster Ordnung. Struve gibt in seiner Abhandlung: „Über den Einfluss der Diffraktion an Fernröhren auf Lichtscheiben" S. 25 eine Tabelle des bestimmten Integrals. Durch Interpolation folgt:

$$\frac{m'}{m} = \frac{0.773}{0.887} = 0.92$$

Ein Zapfenelement fängt demnach **92**% der Energie des ersten Beugungsscheibchens auf; der eigenartige Zerfall der Netzhaut in Zapfen ist also sehr wesentlich für die Merkbarkeit schwächster Reize; die Ausdehnung der Zapfen erscheint als eine glückliche Anpassung an die durch die Beugung modifizierte Abbildung.

Zwei Lichtpunkte beginnen untrennbar zu werden, wenn ihre Beugungsbilder einander so nahe rücken, dass längs der Zentralen die Intensität konstant ist. Dies tritt nach Strehl [Theorie des Fernrohrs S. 118, 3] sehr nahe ein, wenn der Abstand ihrer geometrisch-optischen Bilder = **3,2** in opt. Einh. ist, d. h. für den linearen Abstand auf der Netzhaut von **0.0018** mm[1]); der durch die Beugung [bei **5** mm Pupillendurchmesser] verlangte Minimalabstand beträgt also nur etwa die Hälfte des im Bau der Netzhaut begründeten Minimalabstandes und kommt unter den angegebenen Bedingungen sicher nicht in Frage. Damit ist allerdings noch nicht die Frage entschieden, ob der andere Wert trotz der Beugung richtig bleibt. Dazu ist zu untersuchen, ob für den Fall, dass die geom. opt. Sternbilder bis hart an den Rand des trennenden Zapfenelementes treten, jenes Zapfenelement noch deutlich dunkler als seine Nachbarn empfunden werden kann. Wenn die geometrisch optischen Bilder der Sterne direkt auf der Grenze der Zapfensechsecke liegen, so ist leicht ersichtlich, dass das mittlere Element fast den doppelten Energiebetrag erhält, wie die beiden seitlichen Elemente. Die Beugung muss also die nach der geometrischen Optik berechnete Minimalgrenze vergrössern. Damit eine Trennung der Sterne möglich ist, ist zu fordern, dass der Quotient der Energiemengen, welche ein seitliches, bezw. das mittlere Element erhalten, die Grösse $(1 + \frac{1}{\alpha})$ erreicht, wenn man mit $\frac{1}{\alpha}$ die Verhältnisschwelle zweier benachbarter Zapfenelemente bezeichnet. Es ist, soweit mir bekannt[2]), bisher nicht untersucht, ob das Fechnersche Gesetz in diesem Falle anwendbar ist, doch scheint die hypothetische Anwendung der einzige Weg, um die Frage zu lösen. Über die Grösse von $\frac{1}{\alpha}$ lässt sich ebenso wenig aussagen. Es wird daher die Näherung gerechtfertigt erscheinen, die Grenze zweier Zapfenelemente als die Grenze zweier unendlich grosser Halbebenen aufzufassen. Der Ort des geometrisch optischen Bildes der einen Doppelsternkomponente liege in der Entfernung e von der Grenze des mittleren Zapfenelements. Wenn man voraussetzt, dass die zweite Kompenente von gleicher Intensität ist, so ergibt sich leicht für e die Bedingung:

[1]) Die Reduktion geschieht mittels obiger Formel für u, indem

$k = 15$ mm
$2p = 5$ mm
$\lambda = 589$ $\mu\mu$

gesetzt wird.

[2]) Die späteren Betrachtungen über die Fixsternhelligkeit scheinen dem zu widersprechen.

$$\frac{J(-e)}{2J(+e)} = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

Hierin bedeutet $J(-e)$[1]) die Intensitätsmenge, welche das Element erhält, wenn der Ort des geometrisch-optischen Bildes in der Entfernung e innerhalb liegt und $2J(+e)$ ist die Intensität, welche das mittlere Element enthält, wenn beide Sternkomponenten in der Entfernung e ausserhalb liegen. Für die unendliche Halbebene gilt nun:

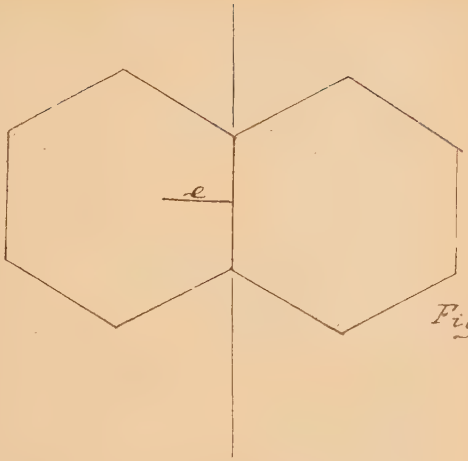

Fig. 3

$$J(-e) = 1 - J(+e)$$

somit erhält man die Bedingung:

$$\frac{1}{J(+e)} = 3 + \frac{2}{\alpha}$$

Für die Werte $\frac{1}{\alpha} = 0, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}$ ergibt die Struvesche Intensitätstabelle [a. a. O. S. 35] die beziehungsweisen Werte

$$e = 0.6,\ 0.7,\ 1 \text{ (in opt. Einheiten)}$$

Der Durchmesser eines Zapfenelements beträgt in optischen Einheiten bei einem Pupillendurchmesser von **5** mm $d = 5.3$ Der zu fordernde Minimalabstand der Sternkomponenten beträgt je nach dem Wert von $\frac{1}{\alpha}$ somit **6.5** bis **7.3**, d. h. der aus der geometrischen Optik folgende Minimalabstand ist mit **1.226** bezw. **1.377** zu multiplizieren. Man erhält: **49″–55″** in guter Übereinstimmung mit dem Mittel aus den empirischen Angaben (**50″**).

Die Heringsche Schärfe der Breitenwahrnehmung wird, wie leicht einzusehen, durch die Beugung nahezu gar nicht affiziert.

Die Beeinflussung der Wahrnehmungsgrenze für die Gestalt eines Objekts durch die Beugung behalte ich mir vor, gesondert zu untersuchen. Im Anschluss an das Vorhergehende möge aber hier schon die Frage erörtert werden: „Wie empfindet das Auge eine nach beliebigen Gesetzen angeordnete Intensitätsverteilung auf der Netzhaut?“ Wie kommt insbesondere eine diskontinuierliche Lichtempfindung und damit die Wahrnehmung der Gestalt eines Objekts zustande, während die Beugung des Lichts veranlasst, dass jedes Objekt eine kontinuierliche Lichtverteilung, die sich streng genommen ins Unendliche erstreckt, auf der Netzhaut hervorruft? Diese Fragen sind beantwortet durch die Untersuchungen von Mach (Prinzipien der Wärmelehre S. 117, 4 u. f., Analyse der Empfindungen S. 163 u. f.) und von v. Seeliger (Die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen S. 13 u. f.). Es hat sich gezeigt, dass ein Netzhautelement nicht unabhängig von seinen Nachbarelementen zu empfinden vermag, dass der Einfluss der Nachbarelemente auf die Empfindung des betrachteten Elements mit der Entfernung abnimmt, vielleicht ausserdem eine Funktion der Intensität[2])

[1]) Die Bezeichnungen $J(-e)$ und $J(+e)$ sind gewählt in Anlehnung an Struve (a. a. O.), welcher die Intensität in der Entfernung e ausserhalb des geom. opt. Bildrandes eines Objekts mit $J(+e)$ bezeichnet usw.

[2]) Die Betrachtung über die Fixsternhelligkeit kann den Beobachtungen nur unter dieser Annahme angepasst werden.

ist. Mach fasst seine Erfahrungen dahin zusammen, dass eine kontinuierliche Änderung der Helligkeit im Netzhautbilde kaum bemerkt wird, so lange die Helligkeit eines jeden Punktes dem Mittel der Helligkeit seiner Nachbarpunkte entspricht, dass dagegen eine Abweichung von diesem Mittel deutlich empfunden wird. Als Näherungswert leitet Mach (a. a. O.) für das Mittel an der Stelle x y ab:

$$M = i + \frac{f}{2} \Delta i$$

worin $i = f(xy)$ die Intensitätsverteilung auf der Netzhaut bezeichnet. $\frac{f}{2}$ ist ein von dem unbekannten Gesetz der Beeinflussung durch die Nachbarelemente abhängiger Faktor und $\Delta i = \frac{\delta^2 i}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 i}{\delta y^2}$. Das zweite Glied von M ergibt direkt die Abweichung der Intensität i im Punkte x y vom Mittel; je nachdem Δi positiv oder negativ ist, wird die Stelle x y als dunkler oder heller empfunden als ihre Umgebung.

Die Kurven $\Delta i = \text{const}$ ergeben mithin die Kurven gleicher Helligkeitsempfindung — eine derselben stellt den „gesehenen" Bildrand dar. Nähere Angaben über die Lage dieser ausgezeichneten Kurve lässt die Unkenntnis der Funktion f nicht zu. Immerhin gestattet die Erfahrung doch eine etwas genauere Angabe. Unter Berücksichtigung des Satzes: (Mach, Analyse d. Empf. S. 163),

„Diese Abweichung vom Mittel wird deutlich empfunden und ladet dem Sehorgan eine besondere Arbeit auf." — „Die Netzhaut verwischt kleine Unterschiede und hebt grössere unverhältnismässig empor. Sie schematisiert und karikiert."

kann man schliessen, dass dort eine Lichtgrenze bemerkt wird, wo Δi plötzlich ansteigt oder fällt. Zu beiden Seiten dieser Grenze macht sich die schematisierende Wirkung der Lichtempfindung dadurch bemerkbar, dass alle stetigen Unterschiede in der Intensität verwischt werden. Auf der Seite der stärkeren Intensitäten sieht das Auge eine Fläche gleichmässiger Durchschnittshelligkeit, auf der Seite der geringeren Intensitäten hingegen gleichmässige Dunkelheit oder wenigstens erheblich geringere Helligkeit.

Diese Überlegungen gelten streng nur, wenn die Netzhautelemente gegenüber den in Betracht kommenden Intervallen der Intensitätsfunktion klein sind. Die Anwendung der Resultate auf Beugungsbilder ist daher streng nur statthaft bei sehr kleiner Pupillenöffnung. Immerhin sind auch im andern Fall die Kurven $\Delta i = \text{const}$ lehrreich, denn sie zeigen, wie ein Auge mit unendlich feiner Wahrnehmungsschärfe die Gestalt des Objekts auffassen würde, während das wirkliche Auge (bei kleinem Objekt) von der spezifischen Gestalt nicht einmal eine Andeutung wahrnimmt, sondern einfach ein Zapfenelement seinem Querschnitt nach als hell empfindet.

Der Abbildungsvorgang im Fernrohr.

Die Beschreibung des durch das Fernrohr vermittelten Abbildungsvorganges nach den Gesetzen der geometrischen Optik kann bekanntlich nur als erste Näherung betrachtet werden. Eine viel genauere Beschreibung der Tatsachen liefert die auf dem Fresnel-Huygens'schen Prinzip in der

von Kirchhoff gegebenen Fassung aufgebaute Beugungstheorie, ja, sofern nicht gegen ihre wesentlichste Voraussetzung (genügende Grösse der Beugungsöffnung und kleine Beugungswinkel) verstossen wird, hat die Erfahrung bisher noch keine Erscheinung, die ihr widerspricht, gefunden. Im allgemeinen pflegt man zwar die Abbildung in der Fokalebene des Fernrohrs nach den Gesetzen der Beugungstheorie zu behandeln, denkt sich jedoch dann, dass die Übertragung dieses Bildes auf die Netzhaut durch das Okular und Auge nach geometrisch-optischen Gesetzen erfolgt. Die Berechtigung zu solchem Vorgehen ergibt sich einerseits aus der Übereinstimmung von Okularmessungen an Beugungsbildern mit den aus der Theorie für die Brennebene folgenden Verhältnissen, andererseits lässt sie sich auf Grund der Arbeiten von Struve und v. Lommel aus der Theorie selber schöpfen, wie dies von Strehl (Theorie des Fernrohrs) bereits geschehen ist. Um nicht gezwungen zu sein, für die Berechnung der Helligkeit der Retinabilder aus der in der Fokalebene herrschenden Intensitätsverteilung auf die Gesetze der geometrischen Optik zurückzugreifen, sei es gestattet, kurz auf die Ausführungen Strehls (a. a. O. Kap. XVI) einzugehen.

Die Theorie zeigt, dass das „Lichtgewebe" zu beiden Seiten der Objektivbrennebene absolut symmetrisch ist und dass die seitlichen Dimensionen des Gewebes nur von dem „Öffnungsverhältnis" $\left(\frac{R}{f} = \frac{\text{Öffnungsradius}}{\text{Brennweite}}\right)$ abhängen. Aus letzterem folgt, dass ein Okular von gleichem Öffnungsverhältnis wie das Objektiv in der Objektivbrennebene abgesehen von der Stärke der Intensität auch genau dieselbe Beugungserscheinung hervorruft wie das Objektiv. Die Symmetrie des Lichtgewebes zu beiden Seiten der Fokalebene des Objektivs lässt folgern, dass das Lichtgewebe zwischen Objektivebene und Okular beim Durchgang der Strahlen vom Objektiv zum Okular genau ebenso gebaut ist wie beim Durchgang der Strahlen vom Okular zum Objektiv (immer gleiches Öffnungsverhältnis vorausgesetzt). Da man nun mit gleichem Recht aus der Gestalt des Lichtgewebes an einem gegebenen Ort auf seine spätere wie auf seine frühere Gestalt schliessen kann, so folgt weiter, dass beim Durchgang der Strahlen vom Objektiv zum Okular jenseits des Okulars das Lichtgewebe den gleichen Bau zeigen muss, wie beim Durchgang der Strahlen vom Okular zum Objektiv vor dem Okular. Bei gleichem Öffnungsverhältnis von Objektiv und Okular besteht mithin das Lichtgewebe nach dem Austritt aus dem Okular genau wie vor dem Eintritt ins Objektiv aus einer Folge ebener, gleichmässig mit Licht erfüllter Wellen. Die Flächendichte der Energie in der austretenden Welle verhält sich zu der in der eintretenden Welle wie die Objektivöffnung zur Okularöffnung oder richtiger wie die Fläche des eintretenden Wellenstücks zur Fläche des austretenden Wellenstücks, falls man von Lichtverlusten im Instrument absieht.

Das Auge wirkt nun auf die austretenden ebenen Wellen wie ein zweites Objektiv, d. h. die Beugungserscheinungen auf der Netzhaut hängen ab von dem Querschnitt des ins Auge gelangenden Lichtbündels. Nennt man die hintere Knotenweite des Auges k und den Öffnungsradius der eintretenden Wellen ϱ, so ist also die seitliche Dimension der Beugungserscheinung proportional $\frac{k}{\varrho}$. Falls Objektiv und Okular gleiches

Öffnungsverhältnis haben $\left(\frac{R}{F} = \frac{r}{f}\right)$[1] und die Minimalöffnung[2]) des Okulars kleiner oder gleich der Pupillenöffnung ist, so ist $\varrho = r$, mithin

$$\frac{k}{\varrho} = \frac{k \cdot F}{R \cdot f}$$

$\frac{F}{R}$ bestimmt die Dimension der Beugungserscheinung in der Fokalebene des Objektivs, während $\frac{k}{f}$ der Faktor ist, um welchen nach geometrisch-optischen Gesetzen eine lineare Dimension in der Fokalebene auf der Netzhaut vergrössert erscheint. Wird jedoch die „Minimalöffnung" des Fernrohrs grösser als die Pupillenöffnung (p) oder werden Diopter von geringerer Öffnung, als die Minimalöffnung und die Pupille sie besitzen, zwischen Okular und Auge eingeschaltet, so hängen die Beugungserscheinungen im Auge vom Öffnungsradius p bezw. vom Öffnungsradius des Diopters ab, und die Regel von der geometrisch-optischen Übertragung der Beugungsbilder der Objektivfokalebene auf die Netzhaut verliert ihre Gültigkeit. Man kann jedoch auch in diesem Falle bezüglich der Dimension und Intensität der Netzhautbilder die Regel anwenden, wenn man — unbekümmert um die Richtigkeit der Darstellung für die Objektivbrennebene — die geometrisch-optische Eintrittspupille des Instruments statt der freien Objektivöffnung in die Rechnung einführt. Strehl spricht dieses Ergebnis aus in dem Satze (a. a. O. S. 112 VII):

„Alle Veränderungen des mit einem aplanatischen Fernrohr gesehenen Beugungsbildes, welche durch Schirme vor dem Objektiv hervorgebracht werden, können gleicherweise mittelst ähnlicher Schirme zwischen Okular und Auge erzielt werden und umgekehrt."

Zusammenfassend kann man sagen:

„Die Beugungserscheinungen auf der Netzhaut, deren Zentren die geometrisch-optischen Bilder der betrachteten Lichtpunkte sind, hängen ihrer Dimension nach ab von dem Querschnitt des ins Auge gelangenden Lichtbündels und der hinteren Knotenweite des Auges $\left(\frac{k}{\varrho}\right)$. Ihre Intensität wird proportional dem Faktor $I^2 = \left(\frac{F}{f}\right)^2$ verstärkt gegen die natürliche Intensität."

Abschnitt III.

Bildgrösse und Helligkeit.

Die Himmelsobjekte erscheinen uns an dem mehr oder weniger erleuchteten Himmelsgrunde; ihre Sichtbarkeit hängt daher nicht nur von der Lichtmenge, die jedes von ihnen dem Netzhautelement zusendet, ab, sondern daneben von der Helligkeit des Himmelsgrundes. Es soll im folgenden die Helligkeit eines Objekts auf absolut schwarzem Grunde einfach seine Helligkeit genannt werden zum Gegensatz zu der relativen Helligkeit des Objekts gegen den erleuchteten Hintergrund. Selbst

[1]) R = Radius des Objektivs, F = Brennweite des Objektivs, r = Radius des Okulars, f = Brennweite des Okulars.

[2]) Mit Minimalöffnung ist die Öffnung $r = R \cdot \frac{f}{F}$ bezeichnet; der spezielle Fall, in welchem die Minimalöffnung r = p, der Augenpupille ist, ist als Normalöffnung bezeichnet; die dazu gehörige Vergrösserung $I_0 = \frac{R}{p}$ als Normalvergrösserung.

bei durchaus schwarzem Himmel sieht man die Gestirne auf einem schwach leuchtenden Grunde, dessen Intensität von dem sogenannten Eigenlicht des Auges herrührt. Da diese Helligkeit jedoch stets sehr gering ist und zudem weder durch Änderung der Pupillenöffnung des Auges noch durch Anwendung eines Fernrohrs beeinflusst werden kann, so können die Resultate für Tagesbeobachtungen garnicht, die für Nachtbeobachtungen nur sehr gering beeinflusst werden, wenn man das Eigenlicht des Auges gänzlich vernachlässigt. (Übrigens wäre der Einfluss auf die Helligkeit eines Gestirns bei Nachtbeobachtungen durch Anbringung eines Faktors $(1-\varepsilon)$, wo ε sehr klein und empirisch zu ermitteln ist, zu berücksichtigen).

Um gleich die allgemeineren Formeln zu erhalten, sei zunächst der Ausdruck für die Helligkeit des Himmelshintergrundes aufgestellt. Der Himmelsgrund ist im Sinne der Beugungstheorie als unendlich ausgedehnte, selbstleuchtende Scheibe zu betrachten — die Annahme des „Selbstleuchtens" ist deshalb hervorgehoben, um die Resultate bezüglich der von Strehl (a. a. O. Kap. XV) hervorgehobenen Schwierigkeiten bei Behandlung beleuchteter Objekte als Näherung zu kennzeichnen. Für eine unendlich ausgedehnte Scheibe müssen die Gesetze der geom. Optik und der Beugungstheorie auf die gleichen Ausdrücke für die Helligkeit führen. Zum Vergleich der in beiden Rechnungsoperationen gewöhnlich eingeführten Konstanten sollen hier beide Rechnungen durchgeführt werden:

Nach den Gesetzen der geom. Optik beträgt die Lichtmenge, welche ein senkrecht auf der optischen Achse stehendes Flächenelement ds in das Objektiv eines Fernrohrs sendet:

$$L = \pi\, i\, ds \sin^2 W$$

wo W den Winkel der Randstrahlen gegen die optische Achse bedeutet. Die Lichtmenge, welche das Bild von ds auf der Netzhaut: ds′ der Augenpupille[1]) zustrahlt, ist:

$$L' = \pi\, i'\, ds' \sin^2 W'$$

wenn W′ den Projektionswinkel des Bildes im Auge bedeutet. Beide Lichtmengen können im besten Falle — falls keine Lichtverluste durch Absorption und Reflexion stattfinden — gleich sein; daraus folgt

$$\frac{i'}{i} = \frac{ds \sin^2 W}{ds' \sin^2 W'} = \frac{n'^2}{n^2}$$ [2])

Die subjektive Helligkeit des Bildes, d. h. die Beleuchtungsstärke auf der Netzhaut, beträgt daher:

$$H = \pi \frac{n'^2}{n^2}\, i \sin^2 W$$

Bezeichnet man mit ϱ den Radius des ins Auge tretenden Lichtbündels und mit k die hintere Knotenweite, so ist:

$$\operatorname{tg} W' = \sin W' = \frac{\varrho}{k}$$

mithin:

$$H = \pi \frac{n'^2}{n^2} \cdot i \frac{\varrho^2}{k^2}$$

[1]) Streng genommen müsste es heissen: der Austrittspupille des Auges, doch wegen der geringen Grössen- und Lagendifferenz dieser gegen die Eintrittspupille des Auges ist einfach die letztere eingesetzt.

[2]) n′: ist der Brechungsindex des Auges, n: der Luft. (nach dem Sinussatz für aplan. Instrumente).

Nach den Resultaten der Beugungstheorie ruft jeder Punkt des Himmelsgrundes — als isolierter Stern gedacht — auf der Netzhaut eine Intensitätsverteilung hervor:

$$I = 4\,A'^2\,\Gamma^2\,(\pi\varrho)^2\,\frac{J_1^2(u)}{u^2}$$

Hierin bedeutet:

A' eine von der Beschaffenheit der Lichtquelle abhängige Konstante;

Γ die Vergrösserung des Fernrohrs; bei Betrachtung mit blossem Auge ist $\Gamma = 1$ zu setzen. Der Nachweis für das Auftreten des Faktors Γ ist erbracht in dem vorausgeschickten Abschnitt;

ϱ den Radius des ins Auge gelangenden Lichtbündels;

J_1 die Besselsche Funktion erster Ordnung;

u eine Variable, deren Einheit in der vorliegenden Untersuchung meist kurz als die „optische Einheit" bezeichnet ist, deren Zusammenhang mit den Konstanten des Apparats gegeben ist durch:

$$u = \frac{2\,\pi\,\varrho}{\lambda\,.\,k}\cdot\varphi^{mm}$$

φ^{mm} soll die in mm gegebene Längenabmessung auf der Netzhaut bedeuten. Es sei hier bemerkt, dass dieser einfache Zusammenhang zwischen u und φ^{mm} nur richtig bleibt für geringe Entfernungen vom Brennpunkt und vom Ort des geom. optischen Bildes des leuchtenden Punktes (vergl. Struve a. a. O. S. 8).

Die Formel für I ist entnommen aus Winkelmanns Handbuch der Optik — wohl ein Zeichen, dass in der Regel mit der so gestalteten Form gerechnet wird. Sobald es sich jedoch nicht um relative, sondern um absolute Auswertungen handelt, stösst man auf Widersprüche in den Zahlenwerten. Strehl hat durch eine sehr schöne Betrachtung an der Hand des Gesetzes von der Erhaltung der Energie gezeigt (a. a. O. Kap. III), dass A' nicht nur von der Lichtquelle abhängt, sondern dass im Nenner die Grösse $(\lambda k)^2$ auftreten muss. Wir erhalten somit die exakte Form:

$$I = A^2\,\Gamma^2\left(\frac{2\,\pi\,\varrho^2}{\lambda\,k}\right)^2\frac{J_1^2(u)}{u^2}$$

Die von den verschiedenen Punkten des Himmels erzeugten Intensitätsverteilungen überlagern sich auf der Netzhaut; mit andern Worten: die Intensität eines Punktes stellt sich so dar, als ob diesem Punkt der Netzhaut von den umliegenden Punkten nach Massgabe ihrer Entfernung Intensität zugestrahlt würde. Ein in der Entfernung u gelegenes Element $\varphi\,d\varphi\,d\omega$ sendet scheinbar daher zu dem Punkte die Energiemenge:

$$dJ = A^2\,\frac{(2\,\pi\,\varrho^2)^2}{\lambda^2\,k^2}\,\frac{J_1^2(u)}{u^2}\cdot\varphi\,d\varphi\,d\omega$$

Der Faktor Γ^2 fällt fort, weil die Anzahl der geometrisch optischen Bilder von leuchtenden Himmelspunkten im Element $\varphi\,d\varphi\,d\omega$ offenbar proportional $\frac{1}{\Gamma^2}$ ist. Die Gesamtenergie, welche ein Flächenelement der Netzhaut erhält, ist mithin:

$$J = ds\left\{A^2\left(\frac{2\pi\varrho^2}{\lambda k}\right)^2\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{J_1^2(u)}{u^2}\,\varphi\,d\varphi\,d\omega\right\}$$

$$= ds\left\{A^2\cdot\varrho^2\,2\pi\int_0^{\infty}\frac{J_1^2(u)}{u}\,du\right\}$$

Nun ist:

$$\int_0^\infty \frac{J_1{}^2(u)}{u}\,du = F(\infty) = \tfrac{1}{2}$$

Somit folgt:

$$\underline{H = A^2 \cdot \pi \varrho^2}$$

Diese Formel wird identisch mit dem Resultat aus der geom. Optik, wenn man setzt

$$\underline{A^2 = \frac{n'^2}{n^2}\, i \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{i'}{k^2}}$$

Wir können mithin A^2 als die Flächendichte der Energie in der Pupillenöffnung bezeichnen und setzen direkt:

$$A^2 = \varepsilon$$

Damit schreibt sich der endgültige Ausdruck für die Helligkeit des Himmelsgrundes:

$$\underline{H = \varepsilon\, \pi\, \varrho^2}$$

Die Helligkeit des Himmelsgrundes ist also von der Vergrösserung des Instruments völlig unabhängig, so lange die Vergrösserung kleiner als die Normalvergrösserung ist. [Mit Normalvergrösserung wird hier, etwas abweichend vom gewöhnlichen Gebrauch, die dem variablen Pupillendurchmesser angepasste Vergrösserung: $\Gamma_0 = \frac{R}{p} = \frac{R}{\varkappa p_0}$ $p_0 = 2.5$ mm $\varkappa < 1$ bezeichnet]. In diesem Fall ist sie stets gleich der „natürlichen Helligkeit", wenn man von Lichtverlusten im Instrument absieht. Wird die Vergrösserung stärker als die Normalvergrösserung, so nimmt die Helligkeit proportional $\left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma}\right)^2$ ab, denn, da stets vorausgesetzt ist, dass die Okularöffnung mindestens die Grösse der Minimalöffnung hat, so wird $\frac{\varrho^2}{p^2} = \frac{\Gamma_0^2}{\Gamma^2}$.

Die geometrische Optik behandelte ursprünglich das Bild eines Fixsterns auf der Netzhaut als mathematisch punktförmig. Aus dieser Auffassung folgt ohne weiteres: Die Helligkeit eines Sterns $\left(\frac{\text{Lichtmenge}}{\text{Zapfenquerschnitt}}\right)$ ist direkt proportional der Fläche der Eintrittspupille des Fernrohrs bezw. des Auges, im übrigen aber von der Okularvergrösserung völlig unabhängig. Der Satz steht bekanntlich in Widerspruch mit der Erfahrung über die Abbildung punktförmiger Objekte. Die Beugungstheorie lehrt die Art der durch eine mathematisch punktförmige Lichtquelle auf der Netzhaut hervorgerufenen Intensitätsverteilung genau darstellen durch den schon mehrfach gebrauchten Ausdruck

$$I_1 = A_1{}^2\, \Gamma^2 \left(\frac{2\,\pi\,\varrho^2}{\lambda\, k}\right)^2 \frac{J_1{}^2(u)}{u^2}$$

Streng genommen ist es nicht zulässig, die Fixsterne in diesem Sinne als punktförmig anzunehmen, d. h. eine endliche Energiemenge von einem ausdehnungslosen Punkt ausgehen zu lassen. In der Tat haben ja auch sicher die Fixsterne einen — wenn auch sehr kleinen und praktisch unmessbaren — scheinbaren Durchmesser, da es gelungen ist, bei einer Anzahl von ihnen die endliche Entfernung von der Sonne zahlenmässig nachzuweisen.

Wie bei der Entwicklung der Formel für die Helligkeit des Himmelsgrundes sei auch hier wieder die Voraussetzung gemacht, dass eine selbstleuchtende Fläche ein enggefügtes Mosaik von inkohärent leuchtenden Punkten ist (wobei man hier unter „leuchtenden Punkten" etwa einzelne schwingende Ätheratome verstehen kann). Bezeichnet man nun von irgend einem Anfangspunkt gezählt die Polarkoordinaten eines Netzhautelements mit r und ω, ferner die Polarkoordinaten eines Flächenelements des geom.-opt. Bildes der leuchtenden Fläche in Bezug auf das Netzhautelement $r\,dr\,d\omega$ mit φ und ψ, so wird die von dem Element $r\,dr\,d\omega$ erhaltene Intensitätsmenge J dargestellt durch:

$$J = \left\{ \frac{\Gamma^2}{f^2} \cdot A^2 \left(\frac{2\pi\varrho^2}{\lambda k} \right)^2 \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{J_1^{\,2}(u)}{u^2} \varphi\, d\varphi \right\} r\,dr\,d\omega$$

Vergl. S. 22.

Die Energieordinate über dem Flächenelement $r\,dr\,d\omega$ der Netzhaut ist also ganz allgemein:

$$I(r\omega) = A^2 \left(\frac{2\pi\varrho^2}{\lambda k} \right)^2 \cdot \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{J_1^{\,2}(u)}{u^2} \varphi\, d\varphi$$

wo die angedeutete Integration über die Fläche des geom.-optischen Bildes der leuchtenden Fläche zu erstrecken ist.

Für grössere Scheiben ist die Intensitätsverteilung nur in der allgemeinen Form $I(r\omega)$ aufstellbar. Die dann möglichen Reihenentwicklungen von $I(r\omega)$ bilden den Gegenstand der mehrfach zitierten Abhandlung Struves. Für unendlich grosse Scheiben erhält man das S. 22 u. 23 abgeleitete Resultat. Für Fixsterne bleibt das geom.-optische Bild trotz aller bislang möglichen Vergrösserungen ein „Flächenelement" der Netzhaut von so geringer Ausdehnung, dass die Funktion $\frac{J_1^{\,2}(u)}{u^2}$ in seinem Bereich als konstant anzusehen ist. Bezeichnet man die Grösse des geom.-optischen Fixsternbildes bei der Vergrösserung 1 (blosses Auge) mit ds, bei der Vergrösserung Γ mit ds', so ist:

$$ds' = \Gamma^2\, ds$$

und daher für Fixsterne:

$$I(r\omega) = A^2\, ds \cdot \Gamma^2 \left(\frac{2\pi\varrho^2}{\lambda k} \right)^2 \cdot \frac{J_1^{\,2}(u)}{u^2}$$

Die Abbildung eines Fixsterns stellt sich also dar als ein spezieller Fall der Flächenabbildung, nicht aber als etwas prinzipiell davon Verschiedenes.

Die Behandlung der Fragen nach der Bildgrösse und Helligkeit von Planetenscheiben, deren numerische Behandlung den Untersuchungen dieses Abschnitts folgt, ist daher im wesentlichen dieselbe, wie die für die Fixsternbilder zu wählende.

Das Fixsternbild.

Die durch I_1 dargestellte Intensitätsverteilung (S. 23) erstreckt sich vom Ort des geometrisch optischen Fixsternbildes allseitig ins Unendliche. Es ist daher zunächst die Frage nach dem Ort der vom Auge gesehenen Bildgrenze zu beantworten. Die Frage sei zunächst, um

damit einen Prüfstein für die Richtigkeit der „praktischen" Lösung zu erhalten, beantwortet für ein Auge mit unendlich feiner Wahrnehmungskraft. Nach den früheren Ausführungen (S. 17 u. 18) gibt in diesem Falle das Verhalten der Funktion

$$\Delta I_1 = \frac{\delta^2 I_1}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 I_1}{\delta y^2}$$

die nötigen Anhaltspunkte. Infolge der kreisförmigen Anordnung der Intensitätsverteilung I_1, lässt sich hier einfacher schreiben:

$$\Delta I_1 = \frac{\delta^2 I_1}{\delta u^2} + \frac{1}{u}\frac{\delta I_1}{\delta u}$$

Die Interpolationsrechnung zeigt nun, wie man aus einer in gleichen Intervallen fortschreitenden Tafel der numerischen Werte einer Funktion die Differentialquotienten der Funktion entnehmen kann. Bringt man z. B. (vergl. Brünnow, Sphär. Astronomie S. 19 u. 27) die Tafelwerte und ihre Differenzen in folgendes übersichtliche Schema:

Argument	Funktion	I. Differenz	II. Differenz	III. Differenz
$a - 3\omega$	$f(a - 3\omega)$			
		$f'\left(a - \frac{5}{2}\right)$		
$a - 2\omega$	$f(a - 2\omega)$		$f''(a - 2)$	
		$f'\left(a - \frac{3}{2}\right)$		$f'''\left(a - \frac{3}{2}\right)$
$a - \omega$	$f(a - \omega)$		$f''(a - 1)$	
		$f'\left(a - \frac{1}{2}\right)$		$f'''\left(a - \frac{1}{2}\right)$
a	$f(a)$		$f''(a)$	
		$f'\left(a + \frac{1}{2}\right)$		$f'''\left(a + \frac{1}{2}\right)$
$a + \omega$	$f(a + \omega)$		$f''(a + 1)$	
		$f'\left(a + \frac{3}{2}\right)$		$f'''\left(a + \frac{3}{2}\right)$
$a + 2\omega$	$f(a + 2\omega)$		$f''(a + 2)$	
		$f'\left(a + \frac{5}{2}\right)$		
$a + 3\omega$	$f(a + 3\omega)$			

so erhält man genähert:

$$\frac{\delta f}{\delta a} = \frac{1}{\omega}\left[f'\left(a + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} f''(a + 1) + \frac{1}{3} f'''\left(a + \frac{2}{3}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot\right]$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta a^2} = \frac{1}{\omega^2}\left[f''(a + 1) - f'''\left(a + \frac{3}{2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot\right]$$

und hieraus:

$$\Delta f = \frac{1}{\omega^2}\left\{\frac{\omega}{a} f'\left(a + \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{\omega}{2a}\right) f''(a + 1) - \left(1 - \frac{\omega}{3a}\right) f'''\left(a + \frac{3}{2}\right)\right\}$$

Eine sehr ausführliche Tafel der Funktion I_1 gibt Schwerd in seiner grundlegenden Arbeit: „Die Beugungserscheinungen aus den Fundamenten der Undulationstheorie analytisch entwickelt und in Bildern dargestellt." (Tab. III.) Das Argument seiner Tabelle ist die optische Einheit in Winkelwerten in Intervallen von $15^0 = \frac{\pi}{12} = 0.2618$. In der folgenden Tafel sind die mit den obigen Faktoren multiplizierten Differenzen D_1, D_2, D_3 aufgeführt. Die letzte Spalte, einfach die Summe der 3 vorhergehenden, gibt den Wert: const. $\times \Delta I_1$

u	I_1 (u)	$\frac{\omega}{u} \cdot D_1$	$\left(1-\frac{\omega}{2u}\right)D_2$	$-\left(1-\frac{\omega}{3u}\right)D_3$	$C \cdot \Delta I_1$	
0	+ 1.0000					
0.2618	0.9825	− 495.0	− 142.5	− 43.3	− 680.8	
0.5236	9330	− 389.9	− 165.0	− 64.2	− 619	
0.7854	8550	− 333.3	− 119.2	− 77.3	− 530	
1.0472	7550	− 285.8	− 49.0	− 71.5	− 406	
1.3090	6407	− 239.8	+ 19.8	− 69.1	− 289	
$\frac{\pi}{2}$ = 1.5708	5208	− 196.2	+ 88.0	− 50.1	− 158	
1.8326	4031	− 154.5	+ 138.4	− 29.5	− 46	
2.0944	2950	− 116.5	+ 168.7	− 11.5	+ 41	
2.3562	2018	− 83.5	+ 181.3	+ 9.6	+ 107	
2.6180	1266	− 56.0	+ 172.9	+ 22.2	+ 139	
2.8798	706	− 34.4	+ 151.8	+ 33.9	+ 151	←
π = 3.1416	329	− 18.2	+ 118.8	+ 37.9	+ 139	
3.4034	109	− 7.3	+ 81.7	+ 37.0	+ 111	
3.6652	14	− 0.7	+ 45.3	+ 29.3	+ 74	
[3.8327]	0.0000					
3.9270	4	+ 2.5	+ 16.4	+ 22.5	+ 41	
4.1888	41	+ 3.4	− 5.8	+ 14.7	+ 12	
4.4506	95	+ 2.8	− 2.1	+ 3.1	+ 4	
$\frac{3\pi}{2}$ = 4.7124	143	+ 1.5	− 2.3	− 2.0	− 3	
4.9742	170	+ 0.2	− 2.1	− 7.9	− 10	←
5.6360	173	− 0.9	− 1.4	− 7.9	− 10	
5.4978	154	− 1.6	− 0.6	− 8.9	− 11	
5.7596	121	− 1.8	+ 0.3	− 5.9	− 7	
6.0214	82	− 1.6	+ 8.8	− 3.0	+ 4	
2π = 6.2832	46	− 1.1	+ 11.8	+ 1.0	+ 12	←
6.5450	19	− 0.6	+ 10.8	+ 3.0	+ 13	
6.8068	4	− 0.2	+ 7.8	+ 1.0	+ 9	
7.0686	02					
7.3304	6					
7.5922	0.0017					

Die Maxima und Minima in ΔI_1, welche die Grenzen des ersten Beugungsringes markieren, sind so unscharf ausgeprägt, dass der Angabe der Zahlenwerte stets eine gewisse Willkür anhaften wird. Dagegen deutet das gut ausgeprägte Maximum in dem oberen Teil der Tafel an, dass der „ideale Radius" des Sternbildes anzusetzen ist, auf etwa:

$$u_1 = 2.90$$

Diesem Radius entspricht, beiläufig bemerkt für den grossen Refraktor der Münchner Sternwarte (Normalvergr. $\Gamma_0 = 57$) ein Durchmesser des Sternscheibchens von $\left(d'' = \frac{\lambda \cdot u_1}{\pi \cdot p \cdot \Gamma_0} \cdot 206265\right)$

$$d = 0''.76$$

Zum Vergleich sei gestattet, aus der Arbeit: „Über das Newtonsche Phänomen der Scintillation von K. Exner und W. Villiger" eine Messungsreihe an dem Beugungsbild von α Aurigae (a. a. O. S. 6) anzuführen. In der letzten Kolumne ist der auf volle (284 mm) Öffnung reduzierte Durchmesser angegeben; die Reduktion geschieht unter der Annahme, dass der Durchmesser des Beugungsbildes umgekehrt proportional der Öffnung ist.

α Aurigae — 10. Febr. 1902

Objektiv-öffnung	Zenithdistanz	Durchmesser	Reduzierter Durchmesser
284 mm	$10^0.62$	0″.82	0″.82
148 ,,		1.46	0″.73
90 ,,		2.59	0″.82
30 ,,		5.60	0″.59
			Mittel 0″.74

Die Übereinstimmung des gemessenen Wertes mit dem errechneten muss angesichts des vielleicht etwas fehlerhaften vierten Wertes und in Hinblick auf die in der Netzhautstruktur begründeten und nunmehr zu berücksichtigenden Störungen als vollkommen bezeichnet werden.

Das wirkliche Auge kann die Bildgrenze u_1 nur in Ausnahmefällen genau erfassen wegen der endlichen Ausdehnung der Zapfenelemente. Für die „praktische" Bestimmung der Bildgrenzen wird man etwa wie folgt verfahren müssen:

Man bestimmt für eine Reihe radial aufeinanderfolgender Zapfenelemente, vom Mittelpunkt des Sternbildes anfangend, die durchschnittlichen Intensitätsordinaten O_n $(n = 1, 2, 3 \cdot \cdot \cdot)$ und verlegt die Bildgrenze an die Stelle, wo der Quotient zweier benachbarter Ordinaten: $\frac{O_{n+1}}{O_n} < \alpha$ ist, wenn unter α eine kleine Zahl verstanden wird. Zur Berechnung der durchschnittlichen Intensität O_n zerlegt man die Grundfläche des Lichtgebirges zentral in einzelne Kreisringe von der Breite eines Zapfenquerschnitts; der innere Kreis erhält den Radius $\frac{a}{2}$, wenn a den Zapfendurchmesser bezeichnet. Die jeweilig über einem Kreisring ruhende Lichtmasse, dividiert durch die Kreisringfläche, ergibt die gesuchte Ordinate O_n. Da die erreichbaren Resultate schon wegen der individuellen Verschiedenheit der Zapfendurchmesser nur beschränkte praktische Gültigkeit haben, so dürfte gegen die Berechtigung dieses Verfahrens kaum etwas einzuwenden sein; aus demselben Grunde wird es hinreichen, den Fall zu betrachten, in dem das Zentrum des Beugungsbildes in den Mittelpunkt eines Zapfenelements fällt.

Die über einer Kreisfläche, deren Zentrum das geom. optische Sternbild ist, ruhende Lichtmasse stellt sich dar durch das bekannte Integral

$$M = A_1^2 \, I^2 \, ds \, 2\pi \varrho^2 \int_0^{u'} \frac{J_1^{\,2}(u)}{u} \, du$$

worin die Bedeutung der Buchstaben dieselbe ist wie S. 22; u' ist der Radius des Grundkreises in opt. Einheiten. Als Einheit von M sei die Gesamtlichtmasse eingeführt:

$$M_\infty = A_1^2 \, I^2 \, ds \, 2\pi \varrho^2 \int_0^{\infty} \frac{J_1^{\,2}(u)}{u} \, du = A_1^2 \, I^2 \, \pi \varrho^2 \cdot ds$$

Bezeichnet man weiter mit Struve das Integral:

$$\int_0^{u'} \frac{J_1^{\,2}(u)}{u} \, du = F(u')$$

so ist in der erwähnten Einheit:

$$M = 2\,F\,(u')$$

Für die Berechnung von F (u') lässt sich unter Benutzung der konvergenten Reihe von J_1 (u) die stets konvergierende Reihe ableiten (vergl. Struve a. a. O. S. 22 u. f.):

$$F(u') = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n u^{2n}$$

$$a_n = \frac{(2n-1)!}{2^{2n}(n-1)!\,(n+1)!\,(n!)^2}$$

Für die Koeffizienten ergibt sich leicht die Rekursionsformel:

$$a_n = \frac{2n-1}{2n^2(n+1)} \cdot a_{n-1};\quad a_1 = \frac{1}{8}$$

Die daraus folgenden Zahlenwerte sind:

$\lg a_1 = 9.0969100 - 10$	$\lg a_6 = 2.4925187 - 10$	$\lg a_{11} = 2.6432723 - 20$
$\lg a_2 = 8.1938200$	$\lg a_7 = 0.7121460 - 10$	$\lg a_{12} = 0.4316643 - 20$
$\lg a_3 = 7.0354575$	$\lg a_8 = 8.8267848 - 20$	$\lg a_{13} = 8.1545595 - 30$
$\lg a_4 = 5.6764354$	$\lg a_9 = 6.8477187$	$\lg a_{14} = 5.8165459$
$\lg a_5 = 4.1535566 - 10$	$\lg a_{10} = 4.7840496 - 20$	$\lg a_{15} = 3.4216114 - 30$

Für grosse Argumente wird diese Entwicklung unbequem; man benutzt in diesem Falle am besten die aus der semiconvergenten Reihe von J_1 (u) folgende semiconvergente Reihe:

$$F(u') = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{u'} - \frac{\cos 2u'}{2u'^2} + \frac{\sin^2\left(u' - \frac{\pi}{4}\right)}{4u'^3}\right)$$

deren Resultate von Argumentwerten $u' \geq 4$ ab bis auf eine Einheit der 4. Dezimale sicher sind (vergl. die von Struve a. a. O. S. 25 gegebene Tabelle). Da die von Struve a. a. O. S. 41 gegebene Tabelle für 2 F (u') für die direkte Interpolation nicht ausreicht, so wurde sie nach den obigen Formeln von mir ergänzt; dabei ist von Werten $u' \geq 4$ ab die semiconvergente Reihe benutzt. Zunächst wählte ich das Intervall 0.25 und dann, in ziemlich genauer Annäherung an die Werte eines Zapfendurchmessers in optischen Einheiten bei verschiedenen Vergrösserungen bezw. Pupillenöffnungen, das Intervall 0.333.

u'	2 F (u')	u'	2 F (u')	u'	2 F (u')	u'	2 F (u')
0.00	0.0000	2.00	0.6173	4.00	0.8379	7.00	0.9101
0.25	0155	2.25	6924	4.25	8390	8	0.9155
0.33	0269	2.33	7129	4.33	8404	10	0.9378
0.50	0606	2.50	7506	4.50	8436	12	0.9479
0.67	1061	2.67	7802	4.67	8484	16	0.9612
0.75	1308	2.75	7916	4.75	8513	20	0.9676
1.00	0.2208	3.00	0.8174	5.00	0.8611	50	0.9874
1.25	3316	3.25	8311	5.33	8759	100	0.9937
1.33	3556	3.33	8336	5.67	8902	200	0.9968
1.50	4267	3.50	8366	6.00	0.9008	1000	0.9994
1.67	4959	3.67	8377	6.33	9070	2000	0.9997
1.75	5273	3.75	0.8378	6.67	9096		
2.00	0.6173	4.00	8379	7.00	0.9101		

Die Tabelle gestattet die direkte Interpolation mit der Genauigkeit einer Einheit der 3. Dezimale.

Die zur Ausführung des S. 27 skizzierten Verfahrens nötigen Radien der Kreisringe in optischen Einheiten sind Multipla der Zapfenradien und als solche natürlich abhängig von dem Wert des Zapfendurchmessers in optischen Einheiten für verschiedene Vergrösserungen, bezw. Pupillenöffnungen. Diese bestimmen sich aus der Formel:

$$u = \frac{2\,\pi\,p}{\lambda\,k} \cdot a_{mm}$$

Vergl. S. 22.

worin: 2 p der Pupillendurchmesser des Auges,
λ die Wellenlänge des Lichts = 589 $\mu\mu$,
k = 15 mm die hintere Knotenweite des Auges,
a = 0.003 mm der Zapfendurchmesser ist.

Der Bequemlichkeit des Vergleichens halber seien die für verschiedene Vergrösserungen folgenden Werte, wenn man für die Normalvergrösserung Γ_0 den Pupillendurchmesser $2p_0 = 5$ mm setzt, angeführt:

Vergrösserung	Pupillendurchmesser	Zapfendurchmesser in opt. Einheiten
Γ_0	5 mm	5.33
$2\,\Gamma_0$	2.5	2.67
$4\,\Gamma_0$	1.25	1.33
$8\,\Gamma_0$	0.625	0.67
$16\,\Gamma_0$	0.3125	0.33
$10.7\,\Gamma_0$	0.467	0.50
$21.3\,\Gamma_0$	0.234	0.25

Nennt man für den Augenblick den Zapfendurchmesser in optischen Einheiten o, so wird die allgemeine Form für die durchschnittliche Intensität in einem Zapfenelement vom Durchmesser a mm = o opt. Einheiten:

$$O_n = \frac{2}{\pi\,a^2}\,[2\,(n+1)]\,\cdot\left\{F\left(\frac{o}{2}+(n+1)\,o\right) - F\left(\frac{o}{2}+n\,o\right)\right\}$$

Die so erhaltenen Grössen: $O'_n = O_n \cdot \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ sind für verschiedene Vergrösserungen in folgende Tabellen vereinigt. Da die Tafel für F (o) S. 28 die Funktionsdifferenzen für das Intervall 0.333 noch direkt entnehmen lässt, so wurde für die Vergrösserung 16 Γ_0 der Fall gewählt, in dem das Zentrum des Beugungsbildes auf der Grenze zweier Zapfenelemente liegt, zumal bei einer so starken Vergrösserung die geringe Bildverschiebung von unmerklichem Einfluss sein wird. Um einen direkten Vergleich mit der Tabelle für I, S. 26 zu ermöglichen, sind in der Kolumne $\frac{O_n}{O_0}$ die Intensitäten in Einheiten der Zentralintensität ausgedrückt. Diese Reihe ist überdies am übersichtlichsten für die Festsetzung der Bildgrenze.

u'	$2(F(u'_{n+1})-F(u'_n))$	O'_n	$\frac{O'_n}{O_0}$	Bemerkungen
	Normalvergrösserung Γ_0			
2.67	0.7802	0.7802	1.0000	←
8.00	0.1353	0.0169	0.0217	
	$2\,\Gamma_0$			
1.33	0.3556	0.3556	1.0000	
4.00	0.4823	0.0603	0.1696	←
6.67	0 0717	0.0047	0.0132	
	$4\,\Gamma_0$			
0.67	0.1061	0.1061	1.0000	
2.00	0.5112	0.0639	0.6023	
3.33	0.2163	0.0135	0.1272	← Der Bildmittelpunkt fällt in das Zentrum eines Zapfenelements.
4.67	0.0148	0.0006	0.0057	
6.00	0.0524	0.0016	0 0151	
	$8\,\Gamma_0$			
0.33	0.0269	0.02690	1.0000	
1.00	1939	2424	0.9011	
1.67	2751	1719	6390	
2.33	2170	904	3361	
3.00	1045	327	1218	←
3.67	203	51	190	
4.33	27	05	19	
5.00	207	37	138	
5.67	291	45	170	
6.33	168	23	87	
7.00	0.0031	0.00004	0.0015	
	$16\,\Gamma_0$			
0.33	0.0269	0.00673	1.0000	
0.67	792	660	9807	
1.00	1147	573	8514	
1.33	1348	481	7147	
1.67	1403	390	5795	
2.00	1214	276	4100	
2.33	956	184	2734	
2.67	673	112	1664	
3.00	372	55	817	
3.33	162	21	312	Der Bildmittelpunkt liegt auf der Grenze zweier Zapfenelemente.
3.67	41	5	74	←
4.00	2	02	3	
4.33	25	25	37	
4.67	80	7	104	
5.00	127	11	164	
5.33	148	12	178	
5.67	143	11	164	
6.00	106	8	119	
6.33	62	4	59	
6.67	26	17	25	
7.00	5	0.000003	0.0004	

Die aus dem S. 27 vorgeschlagenen Kriterium folgenden Bildgrenzen sind durch die in die letzte Spalte zeigenden Pfeile kenntlich gemacht. Will man zur Vereinheitlichung der Zahlen den Bildradius für $16\,\Gamma_0$ auf den Fall des Zusammenfalles von Bild- und Zapfenmittelpunkt reduzieren, so hat man ihn, wie leicht ersichtlich, um einen Zapfenradius = 0.17 zu verkleinern. Man hat somit folgende Werte der Bildradien:

		Durchmesser des Fixsternbildes im Refraktor der Münchener Sternwarte ($\Gamma_0 = 57$)
Γ_0	2.67	0″.70
$2\,\Gamma_0$	4.00	1″.05
$4\,\Gamma_0$	3.33	0″.87
$8\,\Gamma_0$	3.00	0″.79
$16\,\Gamma_0$	3.17	0″.83
		Mittel 0″.85

Man kann also sagen: Die Durchmesser der Fixsternscheiben hängen wegen der Zapfenstruktur der Netzhaut mittelbar merklich von der Okularvergrösserung ab. Ebenso liegt es in der Zapfenstruktur der Netzhaut begründet, dass bei Abblendung des Fernrohrobjektivs das Gesetz des entsprechenden Wachstums der Fixsternbilder nicht rein hervortritt.

Die zweite Frage nach der vom Auge empfundenen Helligkeit, d. h. die Frage nach der Lichtabnahme eines Sterns in Grössenklassen bei verschiedener Okularvergrösserung lässt sich nur mit beschränkter Bestimmtheit beantworten, da über die Art der Lichtempfindung der Netzhaut bislang sehr wenig bekannt ist. Man weiss (vergl. S. 17 u. 18), dass, obwohl jedes Zapfenelement eine Sondernervenleitung zum Empfindungszentrum hat, ein „Mitempfinden" — ein Schematisieren und Karikieren — stattfindet. Da irgendwelche näheren Anhaltspunkte fehlen, so ist es nötig, gewisse Hypothesen zu machen und durch Vergleich der erhaltenen Resultate mit der Erfahrung einigen Aufschluss zu erlangen suchen.

Nimmt man zunächst an, dass der Einfluss der Mitempfindung von untergeordneter Bedeutung ist, so kann seine Vernachlässigung zu Resultaten führen, die von der Erfahrung nur wenig abweichen. Es ist bezüglich der Rechnung dann eine Unterscheidung zu treffen zwischen den Wegen, auf denen man sich die Helligkeitsmessung ausgeführt denkt. Will man etwa feststellen, welche niedrigste Sterngrösse bei konstanter Objektivöffnung und vorgegebener Okularvergrösserung noch gesehen werden kann, oder misst man mit dem Keilphotometer, so kann offenbar nur die Lichtmenge bezw. Durchschnittsordinate des in der Bildmitte liegenden Zapfenelements in Frage kommen, denn erst, wenn diese Lichtmenge unter den Schwellenwert sinkt, wird der Stern unsichtbar. Will man andrerseits die Sternhelligkeit schätzen, so wirkt das ganze Bild auf die Netzhaut, und man hat, eingedenk des Schematisierens, mit der Durchschnittsordinate des ganzen Sternbildes zu rechnen.

Bezeichnet man die durchschnittliche Intensitätsordinate des zentralen Zapfenelements für die Vergrösserung Γ_0 mit O_0, für die Vergrösserung $\Gamma > \Gamma_0$ mit O_c, so gibt offenbar die Zahl

$$\frac{\lg O_0 - \lg O_c}{0.4} = \Delta\,\mathrm{m}$$

an: wenn bei Benutzung der Normalvergrösserung Γ_0 ein Stern der m. Grösse noch eben sichtbar ist, so ist bei Benutzung der Vergrösserung $\Gamma > \Gamma_0$ ein Stern der Grösse $(m - \Delta m)$ an der Grenze der Sichtbarkeit. Unter Benutzung der S. 30 gegebenen Zahlen erhält man:

Vergrösserung	Δ m
Γ_0	—
$2\,\Gamma_0$	0.85
$4\,\Gamma_0$	2.17
$8\,\Gamma_0$	3.66
$16\,\Gamma_0$	5.17

d. h. Resultate, die mit der Erfahrung durchaus in Widerspruch stehen (wie übrigens auch die S. 35 u. 36 mitgeteilten Beobachtungsreihen erkennen lassen[1]).

Nicht besser werden die Ergebnisse, wenn man die Durchschnittsordinaten für die ganze Bildfläche in die Rechnung einführt. Ich führe daher die Zahlen nicht an.

Es folgt mithin, dass für Fixsternbilder die Mitempfindung der Netzhaut eine wesentliche Bedeutung hat.

Zur Rechtfertigung einer neuen Hypothese ist es nötig, durch einige Überlegungen an der Hand der erwähnten Erfahrungstatsachen die Vorstellung über die mögliche Wirkungsweise der Mitempfindung zu präzisieren.

Die Erfahrung lehrt, dass die Helligkeitsabnahme von Fixsternen bei konstanter Objektivöffnung und wechselnder Okularvergrösserung erheblich langsamer erfolgt, als die oben erhaltenen Zahlen angeben, ja dass in erster Näherung die Fixsternhelligkeit von der Okularvergrösserung (so lange sie stärker als die Normalvergrösserung ist) unabhängig ist. (Entsprechende Beobachtungsergebnisse werden am Schluss dieses Abschnitts mitgeteilt.) Da keine andern Ursachen für die Erklärung dieses Verhaltens erfindlich sind, so muss man annehmen, dass die Empfindungserregung, welche von einem bestrahlten Zapfenelement ausgelöst wird, durch die Erregung, welche die gleichfalls bestrahlten Nachbarelemente auslösen, verstärkt wird. Da ferner die Netzhaut bei ausgedehnten Bildern erfahrungsgemäss sehr wohl eine Abnahme der Flächenhelligkeit mit dem Quadrat der wachsenden Vergrösserung konstatiert, so muss die Miterregung eines Zapfenelements durch seine Nachbarelemente eine Funktion der Entfernung sein, welche für grosse Abstände gegen Null konvergiert. In der Optik ist man gewohnt, die Empfindungsstärke an einer Netzhautstelle aus der von dem betrachteten Zapfenelement aufgefangenen Lichtmenge i_0 abzuleiten. Die Mitempfindung wird man daher passend aus einer fingierten Vermehrung der von einem Zapfenelement empfangenen Lichtmenge ableiten. Bezeichnet man die von einem beliebigen Zapfenelement (in der Entfernung r_n und der Richtung α von dem betrachteten Element gelegen) tatsächlich aufgefangene Lichtmenge mit $i_{n\alpha}$, so kann man die für die Empfindungsstärke in dem betrachteten Element massgebende fingierte Lichtmenge J vielleicht ansetzen in der Form:

$$J = i_0 + \sum_{\alpha=0}^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} i_{n\alpha}\, e^{-\lambda r_n}$$

wo λ einen unbekannten Faktor bedeutet.

[1]) Die Beobachtungen verlangen hier, dass Δ m nahezu gleich Null ist.

Weiter lehrt die Erfahrung[1]), dass bei Bestrahlung eines einzigen Zapfenelements in erster Näherung nur dieses allein als hell empfunden wird. Es findet also von ihm aus keine oder doch nur eine sehr minimale Miterregung der Nachbarelemente statt. Diese Erscheinung — gewissermassen eine Trägheit der Mitempfindung — besagt, dass Miterregung eines Zapfenelements durch seine bestrahlten Nachbarelemente nur dann in merkbarem Betrage stattfindet, wenn jenes Element primär schon merkbar erregt ist. Die Miterregung des Elements mit der primär erhaltenen Lichtmenge i_0 durch seine Nachbarn ist also eine Funktion von i_0, welche mit i_0 gegen Null konvergiert. Man kann diesem Umstand in der obigen Formel Rechnung tragen, wenn man annimmt, dass λ eine Funktion von i_0 ist, welche für $i_0 = 0$ unendlich wird. Man hat dann:

$$J = i_0 + \sum_{\alpha=0}^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} i_{n\alpha}\, e^{-f(i_0)\,\cdot\, r_n}$$

Um nun den Erfahrungstatsachen über die Fixsternhelligkeit bei dunklem Himmelsgrunde zu genügen, kann man etwa annehmen, dass für alle Zapfenelemente innerhalb des gesehenen Fixsternbildes $f(i_0) = 0$, für alle ausserhalb gelegenen Elemente $f(i_0) = \infty$ ist. Durch diese Voraussetzung des extremen Karikierens geht für jedes Zapfenelement innerhalb des Fixsternbildes der Wert von J über in:

$$J = A_1^2\, \Gamma^2\, ds \cdot 2\,\pi\,\varrho^2 \int_0^{u_1} \frac{J_1{}^2(u)}{u}\, du = M$$

wo u_1 den Bildradius in optischen Einheiten bedeutet.

Bezeichnet man nun mit M_0 den Wert von M für die Vergrösserung Γ_0, mit M den Wert für die Vergrösserung $\Gamma > \Gamma_0$, so gibt die Zahl

$$\frac{\lg M_0 - \lg M}{0.4} = \Delta\, m$$

an, dass ein Stern, der bei Benutzung der Normalvergrösserung Γ_0 von der m.Grösse erscheint, bei der Vergrösserung $\Gamma > \Gamma_0$ von der $(m + \Delta m)$. Grösse erscheint.

Charakterisiert man das punktförmig empfindende Auge durch die Vergrösserungszahl ∞, so gibt die folgende Tabelle die Werte Δ m für das „ideale" Auge und für das wirkliche Auge bei Anwendung verschiedener Vergrösserungen.

Vergrösserung	u_1	$\frac{M}{A_1^2\, \Gamma^2\, ds\, \pi\, \varrho^2}$	Δ m
∞	2.90	0.8071	— 0.04
Γ_0	2.67	7802	0
$2\,\Gamma_0$	4.00	8379	— 0.08
$4\,\Gamma_0$	3.33	8336	— 0.07
$8\,\Gamma_0$	3.00	8174	— 0.05
$16\,\Gamma_0$	3.17	8267	— 0.06

Man erhält mithin durch die obige Hypothese das gewünschte Resultat: die näherungsweise Unabhängigkeit der Fixsternhelligkeit von der Okularvergrösserung. Genau genommen zeigt die Tabelle sogar eine geringe Zunahme der Helligkeit beim Übergang von Γ_0 auf eine Vergrösserung

[1]) Bei Betrachtung einer Punkt-Lichtquelle beträgt der Bildwinkel stets etwa 40″, entsprechend dem Durchmesser eines einzigen Zapfenelements.

$> 2\,r_0$; ohne Zweifel ist das ein Zeichen, dass die einfache Voraussetzung, wie vorherzusehen war, nicht streng richtig ist. Die Voraussetzung kann mit praktisch genügender Annäherung selbstverständlich nur für einen begrenzten Bereich der Variabilität der Okularvergrösserung richtig sein, denn bei übertrieben starker Vergrösserung muss sich offenbar eine Helligkeitsabnahme mit dem Quadrat der wachsenden Vergrösserung einstellen.

Für die Festlegung der Gültigkeitsgrenzen muss wiederum die Erfahrung herangezogen werden. In der Literatur vermochte ich hierzu nur einige Angaben von Vidal über die Helligkeit von Sternen durch Diopter gesehen zu finden (Connaissance des Temps 1807 S. 383). In der oben gebrauchten Bezeichnungsweise lauten seine Angaben:

Diopteröffnung	Vidal Δ m	Rechnung Δ m
4.51 mm	—	—
2.26	**1**	**1.5**
1.13	**2**	**3.0**
0.56	**3**	**4.5**
0.28	**4**	**6.0**
0.14	**5**	**7.5**

Bei Benutzung von Dioptern von verschiedener Öffnung (die Öffnungen müssen natürlich gleich oder kleiner als die Pupillenöffnung sein) lautet der Ausdruck für das in Betracht kommende J:

$$J = A_1^2\, ds\, \pi\, \varrho^2 \cdot 2 \int_0^{u_1} \frac{J_1^{\,2}(u)}{u}\, du$$

wo ϱ den Radius der Diopteröffnung bedeutet. Setzt man in erster Näherung nach der obigen Voraussetzung:

$$\pi\, A_1^2\, ds \cdot 2 \int_0^{u_1} \frac{J_1^2(u)}{u}\, du = C = \text{const.}$$

so unterscheidet sich die Helligkeit eines Sterns durch ein Diopter vom Radius ϱ gesehen von der Helligkeit beim Radius $\frac{\varrho}{2}$ um:

$$\frac{\lg \dfrac{\varrho^2}{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2}}{0.4} = \frac{0.602}{0.4} = 1^{m} \cdot 5$$

Die Zahlen aus dieser Rechnung sind oben in der dritten Spalte angeführt. Es ergibt sich bei der kleinsten Diopteröffnung demnach die Differenz: Rechng—Beob (Vidal) $= 2^{m} \cdot 5$.

Diese schlechte Übereinstimmung veranlasste mich, die Beobachtungen von Vidal zu wiederholen, da die Vermutung nahe lag, dass seine Angaben über die Grösse der Diopteröffnungen unrichtig sind. Ich bediente mich dazu einer von der Firma Sendtner, München, für photometrische Zwecke mit Diopteröffnungen versehenen Scheibe. Die Bestimmung der Öffnungsdurchmesser geschah für die Öffnungen No. 21—23 mit Hilfe einer Zehntelmillimeterskala von Zeiss, die der übrigen Diopter mit Hilfe eines Ablesemikroskops am Repsoldschen Meridiankreis der Münchner Sternwarte (der Fehler ist kleiner als **0.01** mm). Die Diopter No. 1, 3 und 6 konnten wegen ihrer Abweichung von der Kreisform für die

Beobachtung nicht verwendet werden. In der folgenden Tabelle sind die Öffnungsdurchmesser in mm und die aus dem Verhältnis der Quadrate der Durchmesser zu (5 mm)² folgenden Δ m angegeben.

Öffnung №	d mm	Δ m	Öffnung №	d mm	Δ m
23	3.05	1.07	11	0.94	3.63
22	2.74	1.31	10	0.90	3.72
21	2.12	1.86	9	0.86	3.82
20	1.91	2.09	8	0.82	3.92
19	1.72	2.32	7	0.64	4.46
18	1.64	2.42	6	—	—
17	1.59	2.49	5	0.41	5.43
16	1.56	2.53	4	0.33	5.90
15	1.42	2.73	3	—	—
14	1.27	2.97	2	0.22	6.78
13	1.20	3.10	1	—	—
12	1.11	3.27	24	0.19	7.10

Nach einigen Vorversuchen am 7. und 12. Mai 1909 stellte ich die unten folgenden Beobachtungen wie folgt an: Nachdem das Auge genügend ausgeruht war, suchte ich nahe der zu beobachtenden Sterngruppe mit blossem Auge ein an der äussersten Grenze der Sichtbarkeit stehendes Objekt auf. Dann schwächte ich eine Anzahl der hellen Sterne durch die Diopteröffnungen bis auf die so fixierte Sichtbarkeitsgrenze ab und notierte die Nummer der Diopteröffnung, bei der diese Grenze erreicht wurde. Addiert man nun zu dem der Öffnung entsprechenden Δ m die Helligkeit des beobachteten Sterns in Grössenklassen, so muss sich, falls die Voraussetzungen richtig sind, eine Konstante, die „Sichtbarkeitsgrenze" ergeben.

1909 Mai 19.

Stern	Grösse	Die Grenze der Sichtbarkeit wurde erreicht bei Öffnung №	Grenze der Sichtbarkeit	Abweichung vom Mittel
	m		m	m
α Lyrae	0.41	2	7.19	+ 0.22
γ „	3.56	10	7.28	+ 0.31
δ „	4.40	17	6.89	— 0.08
η „	4.75	20	6.84	— 0.13
$\varkappa$ „	4.53	19	6.85	— 0.12
μ „	5.44	22	6.75	— 0.22
			Mittel 6.97	
γ Drac.	2.48	7 noch nicht 5 unsichtbar	7.43 [1]	0.00
β „	3.01	7	7.47	+ 0.02
ξ „	3.95	10	7.67	+ 0.24
ν „	4.42	15	7.15 [2]	— 0.28
			Mittel 7.43	

[1]) Zur Bestimmung der Sichtbarkeitsgrenze wurde hier das Mittel der Δ m für No. 7 und No. 5 genommen.

[2]) ν Drac. ist Duplex; die Kompenenten haben die Helligkeit 5 · 18 und 5 · 16. Der Voraussetzung über die Mitempfindung entsprechend wurde die Helligkeit $4^m \cdot 42$ erhalten, durch Subtraktion von $\frac{\lg 2}{0.4} = 0.75$ von $5^m \cdot 17$.

Es zeigt sich mithin in erster Näherung eine vollkommene Bestätigung der auf der obigen Voraussetzung fussenden Rechnung. Die Abweichungen vom Mittel liegen m. E. innerhalb der bei diesen Beobachtungen bei geringer Übung zulässigen Grenze der Beobachtungsfehler und lassen sich zum Teil erklären durch den Hinweis auf das Fehlen eines stetigen Übergangs in der Reihe der Diopterdurchmesser (z. B. ist der Sprung in Δ m zwischen No. 24 und 1 0^m6; zwischen No. 2 und 4 0^m8; zwischen No. 5 und 7 1^m0; zwischen No. 7 und 8 0^m5 etc., während die Δ m für grosse Öffnungen viel stetiger auf einander folgen). Dadurch erklärt sich auch, dass die Grenze der Sichtbarkeit für die hellen Sterne (kleine Öffnungen) durchweg zu gross ausgefallen ist. Überdies scheint durch die Mittelwerte beider Gruppen eine Abhängigkeit von der Zenithdistanz (Kopfhaltung) angedeutet.

Da ich verhindert war, hatte Herr Dr. Zapp die Freundlichkeit, einige Beobachtungen am grossen Refraktor über diesen Gegenstand anzustellen. Es wurden, nachdem das Auge völlig ausgeruht war, zwei sehr schwache Objekte 13^m und 14^m, die Sterne No. 29 und 30 des Sternhaufens GC 4460 (Monographie der Sternhaufen GC 4460 und GC 1440 von B. Peter) bei verschiedener Okularvergrösserung bezüglich ihrer Helligkeit beobachtet.

8. Juni 1909. $10^1/_4{}^h - 11^3/_4{}^h$ M.E.Z.

GC 4460 Stern 29 und 30.

Okular №	Vergrösserung	Bemerkungen
I	95 = 1.7 I_0	* 29 und 30 nicht immer sofort sichtbar, kein Helligkeitsunterschied merklich,
II	148 = 2.6 I_0	merklich deutlicher als bei Ok. I,
III	233 = 4.1 I_0	deutlicher sichtbar, * 30 erscheint schwächer als 29,
V	473 = 8.3 I_0	deutlich sichtbar, 30 merklich schwächer als 29,
VI	631 = 13.5 I_0	dasselbe, Helligkeitsdifferenz noch merkbarer.

An den helleren Sternen 21 (10^m3), 23 (9^m0) und 25 (9^m2) war keine Veränderung bei verschiedener Vergrösserung merkbar.

Die Beobachtungen bestätigen mithin ebenfalls die näherungsweise Unabhängigkeit der Sternhelligkeit von der Okularvergrösserung. Die von Herrn Dr. Zapp beobachtete geringe, scheinbare Aufhellung, die ich übrigens an einem weniger günstigen Abend bestätigt fand, scheint ihren Grund in der durch die verstärkten Vergrösserungen bewirkten Abschwächung der noch merkbaren Helligkeit des Himmels zu haben.

Bevor auf das Verhalten der Fixsternhelligkeit bei erleuchtetem Hintergrunde (Tagesbeobachtungen) eingegangen wird, seien einige Bemerkungen über die Bildgrenze bei hellem Hintergrunde gestattet.

Das oben für die „praktische" Bestimmung der Bildgrenze vorgeschlagene Kriterium

$$\frac{O_{n+1}}{O_n} < \alpha$$

wo α eine kleine Zahl ist, würde hier lauten:

$$\frac{O_h + O_{n+1}}{O_h + O_n} < \alpha$$

wenn O_h die Intensitätsordinate des Himmelsgrundes bezeichnet. Für Tagesbeobachtungen im engeren Sinne ist stets $O_h > O_n$; der Wert des

Quotienten ist also stets grösser als $^1/_2$, d. h. das Kriterium verliert in dem früheren Sinne seine Anwendbarkeit.

Das Mach'sche Kriterium ergibt, da ja der 2. Differentialquotient der Intensitätsfunktion durch das additive Hinzutreten einer konstanten Helligkeit nicht geändert wird, für Tagesbeobachtungen dieselben Bildgrenzen wie für Nachtbeobachtungen (z. B. für $8\,\Gamma_0$ $u_1 = 3.00$, $16\,\Gamma_0$ $u_1 = 2.83$, ∞ $u_1 = 2.9$). Bei geringen Vergrösserungen scheint mir die Berechtigung zur Anwendung des Kriteriums sehr fraglich.

In diesem Falle wird man vielleicht durch Betrachtung des Quotienten $\frac{1}{\alpha_n}$ in:

$$\frac{O_h + O_n}{O_h + O_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\alpha_n};\ n = 1, 2, 3 \ldots.$$

zu brauchbaren Resultaten gelangen. Unter der Voraussetzung, dass O_h gross ist gegen O_n erhält man hieraus bis auf Glieder 2. Ordnung die Gleichung:

$$\frac{O_n - O_{n+1}}{O_h} = \frac{1}{\alpha_n}$$

Legt man nun die Bildgrenze an den Ort, wo der Quotient

$$\frac{O_n - O_{n+1}}{O_{n-1} - O_n} = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$$

ein Maximum hat, so erhält man als Bildgrenzen für die Vergrösserungen:

	Γ_0	$2\,\Gamma_0$	$4\,\Gamma_0$	$8\,\Gamma_0$	$16\,\Gamma_0$
$u_1 =$	**2.67**	**4.00**	**3.33**	**3.00**	**3.00**

d. h. durchweg die gleichen Werte, wie für Nachtbeobachtungen.

Es ist klar, dass diese Grenzen nur dann gesehen werden können, wenn die Lichtmenge, welche von einem Zapfenelement am Bildrande erhalten wird, die Verhältnisschwelle des Reizes erreicht. Andernfalls erscheint es richtiger, die Bildgrenze dort zu suchen, wo die Differenz $(O_n - O_{n+1})$ von geringen Werten plötzlich zu grossen ansteigt und dann genähert konstant bleibt. Man erhält dann die Werte (aus den Zahlen S. 30):

	Γ_0	$2\,\Gamma_0$	$4\,\Gamma_0$	$8\,\Gamma_0$	$16\,\Gamma_0$
$u_1' =$	**2.67**	**1.33**	**2.00**	**2.33**	**2.33**

Je nach der Helligkeit des betrachteten Sterns und des Hintergrundes werden die gemessenen Bildradien zwischen diesen beiden Wertreihen hin und her schwanken.

Rechnet man die für Nachtbeobachtungen ($u_1 = 3.23$) und für Tagbeobachtungen ($u_1 = 2.19$) geltenden Mittelwerte der Bildradien in Bogenmass mit den Konstanten des Münchener grossen Refraktors um, so erhält man die beiden Extremwerte $0''.85$ bis $0''.57$ für den Durchmesser eines Fixsternbildes.

Ein Fixstern muss demnach im Münchener Refraktor je nach Grösse und nach Helligkeit des Hintergrundes Durchmesserwerte von $0''.57$ bis $0''.85$ ergeben (vergl. S. 27).

Zur Beurteilung der Fixsternhelligkeit bei Tage muss zunächst auf den wichtigen Umstand der Verengung der Augenpupille im Tageslicht Rücksicht genommen werden. Sie bewirkt, dass die Okularvergrösserung, welche bei dunklem Himmel als Normalvergrösserung bezeichnet werden kann, bei Tagesbeobachtungen mehr oder weniger weit unter der hier gültigen Normalvergrösserung liegt, denn als Normalvergrösserung ist allgemein jene Vergrösserung definiert, welche die Austrittspupille des Instruments gleich der Eintrittspupille des Auges macht (S. 23).

Bezeichnet man mit p_0 den Pupillendurchmesser des Auges im Dunkeln, mit $\frac{p_0}{\varkappa} = p$ den Pupillendurchmesser am Tage, so besteht zwischen der Tages- (Γ_0') und Nachtnormalvergrösserung (Γ_0) die Beziehung:

$$\Gamma_0' = \varkappa \cdot \Gamma_0$$

Bei Benutzung der Vergrösserung Γ_0 am Tage wird nach S. 23 der Himmelsgrund in „natürlicher" Helligkeit erscheinen; die Lichtmenge M innerhalb des gesehenen Fixsternbildes wird nach S. 27 dargestellt durch:

$$M = A_1^2 \, ds \, \Gamma_0^2 \, 2\pi \frac{p_0^2}{\varkappa^2} \cdot F(u_1)$$

Bei Benutzung der Tagesnormalvergrösserung Γ_0' bleibt die Helligkeit des Hintergrundes ungeändert, ebenso die Ausdehnung des Sternbildes auf der Netzhaut (nach wie vor durch die Augenpupille bestimmt); die Lichtmasse innerhalb des Sternbildes ist dagegen jetzt:

$$M' = A_1^2 \, ds \, \Gamma_0'^2 \, 2\pi \frac{p_0}{\varkappa^2} \cdot F(u_1)$$

d. h. da $\frac{\Gamma_0'}{\varkappa} = \Gamma_0$

$$\frac{M'}{M} = \varkappa^2$$

Nimmt man an, dass ein Stern der m. Grösse bei der Vergrösserung Γ_0 eben noch sichtbar ist, so ist bei der Vergrösserung Γ_0' ein Stern der Grösse

$$m + \frac{2 \lg \varkappa}{0.4}$$

noch eben sichtbar. In der Tagesbeobachtung muss sich also eine auffallende Verstärkung der Relativhelligkeit eines Sterns beim Übergang von geringen Vergrösserungen zur Tagesnormalvergrösserung bemerkbar machen.

Da weitere Überlegungen direkt an die Beobachtungsergebnisse anknüpfen müssen, so seien zunächst einige Beobachtungsdaten eingeschaltet.

In der Literatur fand ich nur eine ausführlichere Beobachtungsreihe von einem Liebhaber-Astronomen Thomas Dick in „Nicholson's Journal of Natural Philosophy" (1813 V. XXXVI S. 119). D. beobachtete vorwiegend mit einem achromatischen Fernrohr von $1\frac{3}{4}$ inches = $5\frac{1}{4}$ cm Öffnung und benutzte die Vergrösserungen 15, 30, 45, 60 und 100. Schränkt man die Zeit für Tagesbeobachtungen im engeren Sinne ein auf 4^h vor und 4^h nach 12 Uhr mittags, so ergibt sich, dass die schwächsten für ihn am Tage sichtbaren Sterne von der Grösse 1^m2 (α Orionis) waren. Bezüglich dieser und hellerer Sterne zieht D. aus seinen Beobachtungen den Schluss: Vergrösserung 30 ($3\,\Gamma_0$) genügt, wenn die Sterne einen Winkelabstand von mehr als 30^0—40^0 von der Sonne haben, Vergrösserung 45 und 60 sind vorzuziehen. Die Vermehrung der Vergrösserung macht die Sterne leichter sichtbar.

Eine Reihe eigener Versuche in der Zeit vom 1. Oktober 1907 bis 4. Februar 1908 ergab, dass am Tage sichtbar sind:

im Leitfernrohr d. phot. Refraktor d. Münch. Sternwarte Sterne bis zur 3^m0 } Unsicherheit
im grossen Refraktor der Münchener Sternwarte Sterne bis zur 5^m0 } etwa 0^m3

Als Tagesbeobachtung wurde dabei mit Rücksicht auf die Jahreszeit jede Beobachtung innerhalb der Zeit 3^h vor und 3^h nach 12 Uhr mittags gerechnet. Eine erhebliche Überschreitung der Grenzen steigert die Zahlen sehr schnell (z. B. am 25. November 1908 $4\frac{1}{2}{}^h$ p. M. war im grossen Refraktor 24 Vulp. 5^m7 gut sichtbar).

Zur Prüfung des Einflusses der Okularvergrösserung benutzte ich als Objekte: ζ^1 u. ζ^2 Ursae maj. [2^m1, 4^m2]
δ Ursae min. [4^m4]

Es ergab sich:

Okular	Vergrösserung		Bemerkungen
ζ^1 u. ζ^2 Urs. maj.			
I	95	1.7 I_0	ζ^1 ζ^2 sichtbar, ζ^1 deutlich, ζ^2 schwach;
II	148	2.6 I_0	beide erheblich heller, besonders ζ^2;
III	235	4.1 I_0	Vermehrung der Helligkeit nicht merkbar, sehr deutlich;
IV	345	6.1 I_0	Relativhelligkeit ungeändert, Bilder werden verwaschen;
V	475	8.3 I_0	Bilder schlecht, schwächer?
VI	630	11.1 I_0	Bilder schlecht, ζ^2 verschwindet momentweise;
VII	890	15.6 I_0	beide sichtbar, Bilder schlecht;
VIII	1290	22.6 I_0	Bilder sehr verwaschen, unruhig und strahlig, ζ^2 schwach;
δ Urs. min.			
I	95	1.7 I_0	sehr schwach, schwächer als ζ^2 Urs. maj.;
II	148	2.6 I_0	erheblich heller;
III	235	4.1 I_0	sehr deutlich, Vermehrung der Relativhelligkeit nicht zu konstatieren;
IV	345	6.1 I_0	deutlich;
V	475	8.3 I_0	ziemlich hell, aber verwaschen.

Meiner Schätzung nach betrug der Durchmesser meiner Augenpupillen 2 mm; die Austrittspupille des Fernrohrs bei Ok II beträgt 1,92 mm, das heisst, die Anwendung des Ok II gibt sehr nahe die Tagesnormalvergrösserung.

Es zeigt sich demnach eine erhebliche Vermehrung der Relativhelligkeit beim Übergang von Ok I zur Tagesnormalvergrösserung (Ok II). Später lässt sich eine Zunahme der Relativhelligkeit kaum konstatieren — es ist nicht ausgeschlossen, dass eine geringe Vermehrung der Relativhelligkeit schon durch das Sinken der Verhältnisschwelle des Reizes beim Sinken der Gesamthelligkeit (vergl. Helmholtz Phys. Optik S. 390 u. f.) eintritt; bei den stärksten Vergrösserungen scheint, — allerdings auch unsicher zu konstatieren — eine geringe Verminderung der Relativhelligkeit stattzufinden. Für die Festlegung dieser Erscheinungen müsste man direkte photometrische Messungen anstellen; auf Grund der Schätzungen lässt sich nur sagen, dass die Relativhelligkeit der Fixsterne bei Tage von der Okularvergrösserung unabhängig ist, solange diese grösser ist als die Tagesnormalvergrösserung.

Um diese Erscheinung zu erklären, muss man zu einer Erweiterung der bisher über $\lambda = f(i_0)$ [S. 33] gemachten Voraussetzungen schreiten. Denn, nähme man etwa an, dass die Mitempfindung in dem Bereich des Fixsternbildes hier ebenso wirkt, wie bei dunklem Hintergrund, so würde eine den Versuchsergebnissen widersprechende starke Vermehrung der Relativhelligkeit mit wachsender Vergrösserung des Okulars als Rechenresultat folgen. Man erhält zum Beispiel für Okular VIII des grossen Refraktors das unzulässige Resultat, dass die Sichtbarkeitsgrenze

gegen Okular II ($I0'$) um 4.8 Sterngrössen steigt, während die Beobachtungen in erster Näherung die Konstanz dieser Grenze verlangen. Man sieht leicht, dass den Beobachtungen genügt werden kann, wenn man den Einfluss der Mitempfindung ganz oder nahezu ausschliesst, d. h., wenn man die Voraussetzung macht, dass für grosse Werte von i_0 die Funktion $\lambda = f(i_0)$ ebenso wie für sehr kleine i_0 gegen Unendlich konvergiert, oder mit andern Worten: bei starker primärer Erregung reagiert eine Stelle im Empfindungszentrum nicht mehr oder kaum noch auf sekundäre Miterregung aus der Umgebung — eine Erscheinung die ja ebenso wie die vorigen Aussagen ein Analogon bei andern Empfindungsvorgängen hat (z. B. Schmerzempfindung).

Zur Erlangung von Zahlenwerten ist eine weitere Spezialisierung der Voraussetzungen nötig.

Schliesst man den Einfluss der Mitempfindung ganz aus, d. h. empfindet jedes Zapfenelement gemäss der von ihm empfangenen Lichtmenge, so bleibt die Frage offen: welches Zapfenelement ist für die Helligkeitsempfindung massgebend?

Die Annahme, dass die Relativhelligkeit gemäss der Formel (S. 37)

$$\frac{O_h + O_n}{O_h + O_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\alpha_n}$$

oder in erster Näherung:

$$\frac{O_n - O_{n+1}}{O_h} = \frac{1}{\alpha_n}$$

vom Auge beurteilt würde, führt in diesem Fall, wie ein Blick auf die Zahlen S. 30 lehrt, zu unzulässigen Resultaten, was kaum überraschen kann.

Es bleiben die beiden Annahmen übrig:

1. Das mittlere Zapfenelement des Bildes ist für den Helligkeitseindruck massgebend, d. h. das Auge vergleicht die Lichtmenge, welche das „zentrale" Zapfenelement erhält direkt mit der Helligkeit des Himmelsgrundes. Es ist also (in der vorigen Bezeichnungsweise) zu betrachten der Ausdruck:

$$\frac{O_h + O_1}{O_h} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

$$\frac{O_1}{O_h} = \frac{1}{\alpha_1}$$

2. Die Helligkeit am Bildrande ist massgebend, d. h. bezeichnet man ein Zapfenelement am Bildrande durch den Index r, so ist der Ausdruck:

$$\frac{O_r}{O_h} = \frac{1}{\alpha_r}$$

zu betrachten, und zwar für die beiden S. 37 angegebenen Extremwerte des Bildradius.

Lässt man noch einen Rest von Mitempfindung zu, indem man etwa annimmt, es werde innerhalb wie ausserhalb des Bildrandes eine durchschnittliche Helligkeit empfunden, so kommt man zu folgenden speziellen Voraussetzungen:

3. Die Durchschnittshelligkeit des Bildes $(O_h + O_d)$ wird direkt mit der Himmelshelligkeit verglichen:

$$\frac{O_d}{O_h} = \frac{1}{\alpha_d}$$

4. Die Durchschnittshelligkeit des Bildes wird mit der Durchschnittshelligkeit ausserhalb des Bildes, unter Berücksichtigung des ausserhalb des Bildes entfallenden Sternenlichts verglichen. Man muss in

diesem Fall eine in gewissem Grade willkürliche Grenze für das Gebiet der Mittelbildung ausserhalb des Bildes festlegen. Es wurde für die Rechnung als äusserste Grenze der Radius u = 8 opt. Einheiten angenommen. Berechnet wurde, mit wohl ohne weiteres verständlicher Bezeichnung, der Ausdruck:

$$\frac{O_d - O_a}{O_h} = \frac{1}{\alpha_\delta}$$

In den folgenden Tabellen sind die Resultate der Voraussetzungen 1, 2, 3, 4 enthalten. Der Quotient q bezeichnet die Grösse:

$$\frac{\alpha_{(\Gamma)}}{\alpha_{(2\Gamma_0)}} = q_{(\Gamma)}$$

Durch den Index Γ soll die Zugehörigkeit zu den verschiedenen Vergrösserungen bezeichnet werden. Der Nenner $\alpha_{(2\Gamma_0)}$ wurde gewählt, weil $2\Gamma_0$ am besten der Tagesnormalvergrösserung entspricht; die Zahlen für Γ_0 haben für diese Betrachtung keinen Sinn und sind daher eingeklammert. Die mit Sichtbarkeitsgrenze „Gr." überschriebene Kolumne giebt den Wert

$$Gr = m + \frac{\lg O_{i\,(n\Gamma_0)} + 2 \lg n - (\lg O_{i\,(2\Gamma_0)} + 2 \lg 2)}{0.4} \quad [1])$$

q sowohl wie Gr. bilden also ein einfaches Mass für die Zweckmässigkeit der betreffenden Okularvergrösserung auf Grund der besonderen Voraussetzungen über die Empfindungsweise der Netzhaut. Die beiden Extremwerte für die Bildgrenzen sind unterschieden als maximale Bildgrenze und minimale Bildgrenze.

Es liegt in der Natur der Voraussetzungen, dass die entsprechenden Resultate unter 3 und 4 wenig voneinander verschieden ausfallen.

Vergr.	O_i	q	Gr.	Vergr.	O_i	q	Gr.
1)				3) Minimale Bildgrenze			
(Γ_0	7802	0.55	m − 0.65)	(Γ_0	7802	0.55	m − 0.65)
2 Γ_0	3556	1	m	2 Γ_0	3556	1	m
4 Γ_0	1061	1.19	m + 0.19	4 Γ_0	686	0.77	m − 0.28
8 Γ_0	269	1.21	m + 0.21	8 Γ_0	146	0.66	m − 0.45
16 Γ_0	67	1.20	m + 0.20	16 Γ_0	36	0.65	m − 0.47
2)				4) Maximale Bildgrenze			
(Γ_0	7802	3.24	m + 1.27)	(Γ_0	7633	2.12	m + 0.81)
2 Γ_0	603	1	m	2 Γ_0	902	1	m
4 Γ_0	135	0.90	m − 0.12	4 Γ_0	326	1.45	m + 0.40
8 Γ_0	33	0.88	m − 0.14	8 Γ_0	99	1.76	m + 0.61
16 Γ_0	8	0.85	m − 0.18	16 Γ_0	23	1.63	m + 0.53
3) Maximale Bildgrenze				4) Minimale Bildgrenze			
(Γ_0	7802	2.10	m + 0.80)	(Γ_0	7633	0.56	m − 0.62)
2 Γ_0	931	1	m	2 Γ_0	3396	1	m
4 Γ_0	333	1.43	m + 0.34	4 Γ_0	664	0.78	m − 0.27
8 Γ_0	101	1.74	m + 0.57	8 Γ_0	142	0.67	m − 0.44
16 Γ_0	23	1.57	m + 0.50	16 Γ_0	35	0.66	m − 0.45

[1]) Der Index i ist gemäss den Voraussetzungen 1, 2, 3 und 4 bezw. gleich 1, r., α oder δ zu setzen.

Den Beobachtungen entsprechen m. E. am besten die Zahlen unter 1) und 2), denn die Veränderungen in Gr und q unter 3) und 4) sind doch so stark, dass sie auch in einer Schätzungsbeobachtung merklich sein müssten. Man hat demnach anzunehmen, dass bei hellem Hintergrund die Mitempfindung ohne merklichen Einfluss ist; es wird jedes Zapfenelement entsprechend der von ihm aufgefangenen Lichtmenge als hell empfunden. Da die Bildgrenze bei Tagesbeobachtungen weniger gut definiert ist als bei Nacht und überdies das „Lichtgebirge" am Bildrande nicht sonderlich hoch ist, so wird das Auge bei der Helligkeitsschätzung wohl das Hauptgewicht auf die Mittelpartie des Bildes legen. Man kann unter dieser Voraussetzung aus den Zahlen q und Gr. unter 1) leicht eine geringe Verbesserung der Relativhelligkeit mit wachsender Okularvergrösserung — ein Deutlicherwerden der Bilder bei wachsender Vergrösserung — erkennen. Auf diese Konstatierung soll hier aber wenig Gewicht gelegt werden, da Schätzungen ohne direkte Photometermessungen diese Verhältnisse kaum prüfen lassen.

Zwischen den beiden für Tag- und Nachtbeobachtung geltenden Extremen bewegt sich der Einfluss der Mitempfindung auf die Helligkeit von Fixsternen je nach den Lichtverhältnissen hin und her. Bei Mondenlicht oder andrer geringer Erhellung des Hintergrundes ist der Einfluss der Mitempfindung offenbar so nahe am Maximum, dass hierin die zwanglose Erklärung für das anfängliche Hellerwerden der Fixsterne mit wachsender Okularvergrösserung bei Nachtbeobachtungen zu suchen ist (vergl. S. 36 Beobachtungsbemerkungen).

Die im vorstehenden erhaltenen Resultate gestatten, mit einiger Sicherheit die Frage der Tagessichtbarkeit von Sternen fürs unbewaffnete Auge zu entscheiden. Da für die Tagessichtbarkeit nur die Relativhelligkeit in Frage kommt, so können die Zahlen q und Gr. durch die Absorption und Reflexion im Fernrohr nicht verändert werden. Man kann also die Resultate fürs Fernrohr ohne Einschränkung auf das unbewaffnete Auge übertragen. Nimmt man an, dass das unbewaffnet den Tageshimmel beobachtende Auge dieselbe Pupillenöffnung hat, wie das Auge am Fernrohr, so erscheint der Himmelsgrund in beiden Fällen gleich hell, falls am Fernrohr die Tagesnormalvergrösserung benutzt wird. Die vom Stern ins Auge gelangenden Lichtmengen verhalten sich wie die Pupillenöffnung des Auges zur Objektivfläche des Fernrohrs, bezw. wie 1 zum Quadrat der Tagesnormalvergrösserung (V_0'). Nennt man m die Sichtbarkeitsgrenze in Sterngrössen für Tagesbeobachtungen am Fernrohr, so ist die Sichtbarkeitsgrenze fürs blosse Auge (gleiche Pupillenöffnung vorausgesetzt)

$$m' = m - \frac{2 \lg V_0'}{0.4}$$

Setzt man die fragliche Pupillenöffnung gleich 2 mm, so erhält man mit den S. 38 gegebenen Werten von m für das achromat. Fernrohr Dicks, für den kleinen Refraktor der Münchner Sternwarte (Objektivdurchmesser 12.5 cm) und für den grossen Refr. der M. Sternwarte der Reihe nach folgende Werte von m':

$$\begin{array}{r} -5^m87 \\ -5.98 \\ -5.76 \\ \hline \text{Mittel: } -5.87 \end{array}$$

Unter gewöhnlichen Umständen würde also ein unbewaffnetes Auge im nordischen Klima höchstens einen Stern der — **5.9** Grösse am Tage (12 Uhr mittags ± 3—4 Uhr) sehen können. Dehnt man die Zeitgrenze weiter aus, so steigt die Sichtbarkeitsgrenze rasch um 1 Grössenklasse und mehr. Am 14. Februar 1908 5 Uhr nachm. war z. B. in München der Planet Venus, der z. Z. des grössten Glanzes etwa — 3. bis — 4. Grösse ist, bereits dem blossen Auge sichtbar.

Es ist schon S. 7 darauf hingewiesen, dass diese Grenze durch besondere Versuchsanordnung variiert werden kann. Der von Scheiner erzählte „Brunnenversuch" lässt sich in diesem Sinne direkt als Benutzung eines optischen Instruments auffassen. Nimmt man z. B. an, dass die Augenpupille sich bei Betrachtung des im Brunnen gespiegelten Himmels auf 5 mm erweitert so wächst die Lichtmenge, welche vom Himmelsgrunde und vom Stern ins Auge gelangt in gleicher Weise proportional der Öffnungsfläche der Pupille; daneben wächst aber die Intensitätsordinate des zentralen Netzhautelements durch Zusammenziehung des Beugungsbildes im Verhältnis $\frac{7802}{3556}$. Die Sichtbarkeitsgrenze ist also um:

$$\Delta\, \mathrm{m} = \frac{\lg 7802 - \lg 3556}{0.4} = 0^{\mathrm{m}}85$$

zu erhöhen. Berücksichtigt man ferner, dass bei solcher Versuchsanordnung die Verhältnisschwelle des Reizes auf die Hälfte ihres sonstigen Wertes sinken kann, so ist eine weitere Erhöhung der Sichtbarkeitsgrenze um $0^{\mathrm{m}}75$ möglich.

Unter Beachtung aller möglichen Vorsichtsmassregeln würde ein unbewaffnetes Auge in unsern Breiten am Tage also einen Stern der — **4.3** gerade noch eben erblicken — d. h. in unsern Breiten ist die Tagessichtbarkeit von Fixsternen ausgeschlossen. Selbst in Ländern mit glücklicheren Luftverhältnissen müssen die Tagesbeobachtungen von Fixsternen mit unbewaffnetem Auge zu den seltensten Ereignissen gehören. Um z. B. den Sirius mit blossem Auge bei Tage sehen zu können, muss die Durchsichtigkeit und Helligkeit der Atmosphäre derart sein, dass ein Instrument von der Grösse des Münchner Refraktors (284 mm Öffnung) einen Stern **8**! Grösse am Tage zeigt, was in der Regel nur der Fall ist, wenn die Sonne sehr nahe dem Horizont sich befindet.

Das Bild einer Lichtscheibe.

Streng genommen ist es nicht zulässig, die Planetenscheiben gleich wie die Sonne als selbstleuchtende Objekte zu behandeln. Strehl legt (a. a. O. Kap. XV) ausführlich die veränderten Verhältnisse dar und zeigt, dass ein einfachster Spezialfall zu erheblich abweichenden Resultaten führen kann.

Strehl XV, 1: „Die im vorstehenden (Selbstleuchtende Objekte) erhaltenen Resultate lassen sich nicht so ohne weiteres, wie André und Struve wollen, auf den Fall anwenden, wo beleuchtete Objekte mit dem Fernrohr betrachtet werden, z. B. Planeten. Von der scheinbaren Grösse der Lichtquelle (Sonne) sowie von der Polarisation des reflektierten Lichts werden wir zunächst absehen."

„Wären die Oberflächen der Planeten vollkommen spiegelnd, so würde der sehr kleine, also merklich ebene den Planeten treffende Teil der von einem Punkte der Sonne ausgehenden homozentrischen Welle durch die Spiegelung in eine volle, ungleichmässige, azentrische Welle verwandelt, von der das Fernrohr wiederum nur einen sehr kleinen, also merklich ebenen Teil auffangen würde. Man würde nicht den Planeten, sondern vielmehr ein verschwindend kleines Stück der kaustischen Fläche jener azentrischen Welle erblicken — die scheinbare Grösse der Sonne natürlich in Rechnung gezogen."

„Würden die Planetenoberflächen das auffallende Licht nach allen Richtungen gleichmässig zerstreuen, so würde zwar das geometrische Bild des Planeten im Fernrohr in jedem Moment aus lauter Lichtpunkten von verschiedener Phase sich zusammensetzen und insofern wie jenes einer selbstleuchtenden Scheibe sich verhalten. Da aber die Schwingungen alle cohärent wären — die Ausdehnung der Lichtquelle käme hier nicht in Betracht, wohl aber die Polarisation des zerstreuten Lichts — so würden sich ihre Wirkungen, z. B. auf die Mitte des geometrischen Bildes, gegenseitig teilweise aufheben, und das momentane Bild würde einem Rest von Lichtpunkten mit merklich gleicher Phase seine Entstehung verdanken, welche sich durchschnittlich gleichmässig über die Fläche des geometrischen Bildes verteilen oder doch um die Mitte anordnen würden. In jedem Moment würden sich diese Verhältnisse umgestalten. . . . . Die Planeten nun sind weder ganz von der einen noch andern Art, und da auch noch die Polarisationsverhältnisse mitspielen, so ist das Problem der Bilder von beleuchteten Objekten von kaum zu bewältigender Schwierigkeit."

Aus dem Spezialfall: Das geometrisch-optische Bild besteht aus konzentrischen Kreisringen, deren Schwingungsamplituden von Ring zu Ring bekannt sind — stellt dann Strehl folgende Folgerungen auf:

I. „An keiner Stelle des Beugungsbildes von selbstleuchtenden Kreisscheiben ist die Helligkeit o; im Umkreis von beleuchteten Kreisscheiben treten Ringe von absoluter Dunkelheit auf."

II. „Wird der Halbmesser der beleuchteten Kreisscheibe grösser, als dem Wert $u = 2,4$ entspricht, so entsteht innerhalb des Randes vom Mittelpunkt aus, eine konzentrische Zone, deren Helligkeit grösser ist als die dem geometrisch-optischen Bild zukommende; mit wachsendem Halbmesser wächst auch diese Zone."

III. „Am Rande sehr grosser beleuchteter Kreisscheiben ist die Helligkeit $^1/_4$ der dem geometrisch-optischen Bild zukommenden."

Angesichts dieser Modifikationen ist besonders zu betonen, dass die folgenden Rechnungen sich nur auf selbstleuchtende Scheiben beziehen und mithin nur ein genähertes Bild von den wirklichen Verhältnissen bei der Abbildung von Planetenscheiben geben können.

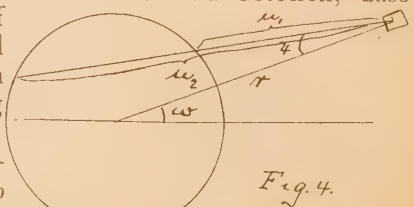

Fig. 4.

Die allgemeine Form für die Energieordinate über dem Flächenelement $r\,dr\,d\omega$ der Netzhaut ist nach S. 24:

$$I(r\omega) = A^2 \left(\frac{2\pi\varrho^2}{\lambda k}\right)^2 \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{J_1(u)}{u^2}\,\varphi\,d\varphi$$

oder da:

$$\varphi \, d\varphi = \left(\frac{\lambda k}{2 \pi \varrho}\right)^2 u \, du$$

$$I(r\,\omega) = A^2 \varrho^2 \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \int_{u_1}^{u_2} \frac{J_1(u)}{u} \, du$$

wo die angedeutete Integration über das geometrisch-optische Bild auf der Netzhaut zu erstrecken ist. Die Bedeutung der Variabeln ist früher angegeben und zudem aus der Figur ersichtlich.

Struve hat a. a. O. einige für verschiedene Werte des Bildradius möglichen Reihenentwicklungen von $I(r\,\omega)$, die zur numerischen Rechnung geeignet sind, angegeben und für Bildradien: ∞, **50**, **10** (in opt. Einheiten) ausgewertet. Ausserdem gibt er eine für das Folgende verwendbare Tabelle der Zentral- und Randintensitäten verschieden grosser Kreisscheiben. Für die weiteren Folgerungen schien es mir nötig, noch eine Intensitätstabelle für eine sehr kleine Kreisscheibe (gewählt wurde der Radius **1** o. E.) zu berechnen. Es lassen sich dafür die von Struve S. 45 a. a. O. angegebenen Formeln benutzen, die sich in etwas abgeänderter Bezeichnungsweise schreiben:

$$I(+e) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \left(A_2^{(n)} - A_1^{(n)}\right)$$

$$I(-e) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \left(B_2^{(n)} + B_1^{(n)}\right)$$

Hierin bedeuten:

$$A_1^{(n)} = \frac{(b\,k_1^2)^{2n}}{2} \int_{\frac{1}{(1+k)^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{1 - k_1^2 x}{\sqrt{R}} x^{n-1} \, dx$$

$$A_2^{(n)} = \frac{b^{2n}}{2} \int_{\frac{1}{(1+k)^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{1 - k_1^2 x}{\sqrt{R}} x^{-n-1} \, dx$$

$k = \frac{r}{b}$

$$B_1^{(n)} = \frac{(r\,k_1^2)^{2n}}{2} \int_{\frac{1}{(1+k)^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{1 + k_1^2 x}{\sqrt{R}} x^{n-1} \, dx$$

$$B_2^{(n)} = \frac{r^{2n}}{2} \int_{\frac{1}{(1+k)^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{1 + k_1^2 x}{\sqrt{R}} x^{-n-1} \, dx$$

$k = \frac{b}{r}$

$$R = -1 + 2(1 + k^2)x - k_1^4 x^2$$

$$k_1 = \sqrt{1 - k^2}$$

Die in den Σ auftretenden Koeffizienten a_n sind die S. 28 angegebenen Werte; r ist der Radius des geometrisch-optischen Bildes auf der Netzhaut, b der Abstand des betrachteten Punktes vom Bildzentrum, e seine Entfernung vom geometrisch-optischen Bildrand und zwar + e für ausserhalb, — e für innerhalb gelegene Punkte. Alle Längen sind in optischen Einheiten ausgedrückt.

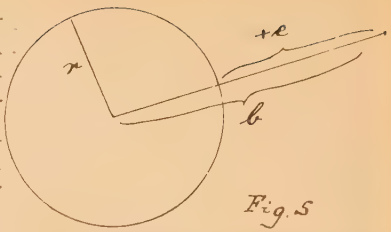

Fig. 5

Es scheint nicht ganz nebensächlich, an dieser Stelle zu bemerken, dass die Bauart dieser konvergenten Formeln derart ist, dass für gleiche Werte k die Reihenglieder für die Intensitätsordinaten einer bestimmten Kreisscheibe durch Multiplikation mit geraden Potenzen der Abstands- bezw. Radienverhältnisse in die Reihenglieder für eine Scheibe mit anderem Radius übergehen.

Die Integrale A und B sind Summen oder Differenzen des allgemeinen Intregrals:

$$\int_{\frac{1}{(1+k)^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{x^{\pm n}}{\sqrt{R}}\,dx$$

welches mit Hilfe der folgenden beiden Rekursionsformeln zu lösen ist:

$$\int_{\frac{1}{(1+k)^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{x^n}{\sqrt{R}}\,dx = i_n = \frac{1}{nk_1^4}\left\{-\frac{2k}{k_1^{2n-1}} + (2n-1)(1+k^2)\,i_{n-1} - (n-1)\,i_{n-2}\right\}$$

$$\int_{\frac{1}{(1+k)^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{dx}{x^n\sqrt{R}} = j_n = \frac{1}{n-1}\left\{2kk_1^{2n-3} + (2n-3)(1+k^2)\,j_{n-1} - (n-2)\,k_1^4\,j_{n-2}\right\}$$

Ferner ist:

$$i_0 = \int_{\frac{1}{(1+k)^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{\arcsin k_1}{k_1^2}$$

$$j_1 = \int_{\frac{1}{(1+k)^2}}^{\frac{1}{k_1^2}} \frac{dx}{\sqrt{Rx}} = \frac{\pi}{2} + \arcsin k$$

Da die Werte i_n und j_n zur Auswertung der Intensitäten kleiner Kreisscheiben stets gebraucht werden, ihre Berechnung aber etwas unbequem ist, so führe ich die Zahlen, soweit ich sie benötigte, hier an:

k →	0.25		0.33		0.40	
n ↓	$\lg i_n$	$\lg j_n$	$\lg i_n$	$\lg j_n$	$\lg i_n$	$\lg j_n$
0	0.1479824		0.1415621		0.1399089	
1	0.0461595	0.2609002	0.0229022	0.2803735	0.0135958	0.2971722
2	9.9559139	0.3840965	9.9252066	0.4374033	9.9191683	0.4818288
3	9.8773218	0.5165321	9.8479567	0.6100585	9.8545423	0.6889072
4	9.8100439	0.6570645	9.7894572	0.7955787	9.8155536	0.9133439
5	9.7533807	0.8045528	9.7472651	0.9914004	9.7973778	1.1507869
6	9.7063748	0.9579313	9.7186891	1.1953427	9.7958116	1.3978800
7	9.6679317	1.1162508	9.7011759	1.4056513	9.8082045	1.6521462
8	9.6369280	1.2786947	9.6925229	1.6209628	9.8344595	1.9118180
9	9.6122920	1.4445777	9.6909372	1.8402370		2.1756408
10		1.6133333		2.0626856		

k →	0.50		0.67	
n ↓	$\lg i_n$	$\lg j_n$	$\lg i_n$	$\lg j_n$
0	0.1449584		0.1812808	
1	0.0211656	0.3210586	0.1135025	0.3626718
2	9.9494769	0.5420805	0.1467367	0.6369375
3	9.9222650	0.7971461	0.2488179	0.9705530
4	9.9284838	1.0760837	0.3920877	1.3382373
5	9.9571165	1.3712592	0.5590211	1.7255911
6	9.9968241	1.6775291	0.7406113	2.1250535
7	0.0326635	1.9915696		2.5325289
8		2.3112370		

Die Rechnung ergab folgende Zahlenwerte:
Intensitätsverteilung an einer Kreisscheibe vom Radius $r = 1$.

b	$I_{(b)}$	b	$I_{(b)}$	b	$I_{(b)}$
0	0.2208	1.0	0.1750	2.5	0.0441
0.33	0.2154	1.49	0.1300	3.03	0.0188
0.67	0.1991	2.0	0.0826	4.0	0.0022

Die im Anhang beigegebene Tafel I ist in einem derartigen Massstab gezeichnet, dass sie mit einer Unsicherheit von 2 Einheiten der 4. Dezimale erlaubt, beliebige Zwischenwerte abzulesen, wie eine Kontrollrechnung gezeigt hat.

An der Hand des vorliegenden Zahlenmaterials ist nun analog dem vorigen Abschnitt die Frage nach der Bildgrenze zu untersuchen. Die Übereinstimmung mit tatsächlichen Messungen hat gezeigt, dass das Mach'sche Kriterium (S. 18, 25 u. f.), wiewohl es streng nur für punktförmig empfindliche Augen und genähert für Okularvergrösserungen weit über der Normalvergrösserung gelten kann, gute Anhaltspunkte für die Festlegung der Bildgrenze an Fixsternen gibt. Es ist zu erwarten, dass ähnlich zuverlässige Resultate auch aus seiner Anwendung auf Bildscheiben entspringen.

Die in den folgenden Tabellen gebrauchte Bezeichnungsweise ist der auf S. 26 angewandten angepasst. Die Zahlenwerte für die Kreis-

scheiben vom Radius ∞, **50**, **10** sind den erwähnten Tabellen Struves entnommen, die in der Tabelle r = **1** vorkommenden Zwischenwerte sind aus der Figur Tafel I abgelesen. Bei der Tabelle r = ∞, musste statt des Abstandes b vom Zentrum der ± e vom geometrisch-optischen Bildrande als Argument gewählt werden.

r = ∞			r = 50		
e	I	c. Δ I	b	I	c. Δ I
− 4.0	0.9472	+ 22←	46.0	0.9360	+ 36←
− 3.6	9436	+ 12	4	9325	+ 8
− 3.2	9398	− 21	8	9292	− 30
− 2.8	9330	− 78	47.2	9227	− 68
− 2.4	9190	− 139	6	9086	− 167
− 2.0	8927	− 199	48.0	8822	− 194
− 1.6	8496	− 234←	4	8379	− 252←
− 1.2	7868	− 225	8	7742	− 208
− 0.8	7045	− 174	49.2	6909	− 205
− 0.4	6066	− 87	6	5930	− 78
0.0	5000	+ 18	50.0	4859	+ 14
+ 0.4	3934	+ 117	4	3799	+ 97
+ 0.8	2955	+ 193	8	2828	+ 191
+ 1.2	2132	+ 226←	51.2	2010	+ 228←
+ 1.6	1504	+ 213	6	1391	+ 206
+ 2.0	1073	+ 174	52.0	0971	+ 163
+ 2.4	0810	+ 114	4	0715	+ 113
+ 2.8	0670	+ 56	8	0577	+ 46
+ 3.2	0602		53.2	0509	
+ 3.6	0564		6	0467	
+ 4.0	0528		54.0	0430	

r = 10			r = 1		
b	I	c. Δ I	b	I	c. Δ I
6.2	0.907	− 4	0.0	0.2208	
6	901	+ 7←	33	2154	− 207
7.0	892	− 4	67	1991	− 217←
4	882	− 16	1.00	1750	− 129
8	862	− 18	33	1443	− 91
8.2	826	− 21	67	1127	− 36
6	772	− 24	2.00	0826	− 3
9.0	699	− 41←	33	0560	+ 3
4	607	− 10	67	0346	+ 83←
8	498	− 8	3.00	0188	+ 43
10.2	393	+ 4	33	0101	+ 6
6	293	+ 16	67	0052	
11.0	207	+ 15	4.00	0022	
4	140	+ 21←	33	0018	
8	091	+ 15			
12.2	060	+ 14			
6	042	+ 10			
13.0	034				
4	031				
13.8	028				

Es zeigen sich in allen 4 Tabellen 3 Maxima bezw. Minima ausgeprägt oder angedeutet. Dabei deuten die am weitesten gegen den Mittelpunkt der Bilder gelegenen Werte den Punkt an, an welchem die Intensität nach scharfem Anstieg von aussen her für das Auge wieder völlig konstant wird; sie rücken mit abnehmendem Scheibendurchmesser in das Bildzentrum und kommen als Bildgrenzen nicht in Betracht. (Vergl. Tab. S. 26.)

Die für das Folgende wesentlichen Werte sind gelegen für:

r = ∞	bei	e = +	**1.2**	und −	**1.6**
r = **50**	„	b =	**51.2**	„	**48.4**
r = **10**	„	b =	**11.4**	„	**9.0**
r = **1**	„	b =	**2.7**	„	**0.67**

Die Lichtverteilung im Beugungsbild stellt sich demnach dem Auge etwa so dar:

In weiterer Umgebung des eigentlichen Bildes bemerkt das Auge unter geeigneten Umständen (dunkler Hintergrund) eine schwache Erhellung des Gesichtsfeldes, die sich nach aussen allmählich ohne merkbare Abstufung verliert. In der Nähe des geom. opt. Bildrandes und zwar noch ausserhalb desselben findet ein derartig plötzlicher Intensitätsanstieg statt, dass eine scharfe Grenze, die äussere Bildgrenze bemerkt wird. Diese Grenze nähert sich mit wachsendem Bildradius der geom. opt. Bildgrenze von etwa 1.7 bis auf 1.2 opt. Einheiten (für den Münchner Refraktor [284 mm Öffnung] von 0″.22 bis 0″.16). Innerhalb dieser Grenze steigt die Helligkeit schnell, doch ohne Abstufung an, bis sich wiederum durch eine scharfe Umbiegung der Intensitätskurve die Neigung zum Konstantwerden der Helligkeit kund tut. Innerhalb dieser zweiten Grenze ist bei grösseren Scheiben der Intensitätszuwachs noch so stark, dass das Auge auch hier, an der inneren Bildgrenze, eine deutliche Abstufung empfinden wird. Bei sehr kleinen Scheiben (z. B. r = 1) ist dagegen die Intensitätszunahme innerhalb dieser Grenze so unbedeutend, dass hier von einer deutlichen inneren Bildgrenze nicht gesprochen werden kann. Aus demselben Grunde finden auch die noch weiter nach dem Bildinnern liegenden dritten Maximal- bezw. Minimalorte von $\mathcal{J}$ I keine weitere Berücksichtigung. Mässig grosse und grosse Lichtscheiben müssen demnach mit einem schmalen, deutlich lichtschwächeren Ring, der aber in der Regel als zum Bild gehörig angesehen wird, umgeben erscheinen, dessen Breite mit wachsendem Scheibendurchmesser abnimmt von 2.8 bis auf 2.4 opt. Einheiten (für den Münchner Refraktor 0″.37 — 0″.31); während man bei sehr kleinen Scheiben wie bei Fixsternen eine Helligkeitsabnahme ohne deutliche Abstufung bis an die äussere Bildgrenze bemerkt.

Wir werden hiermit auf die Beantwortung von Fragen geführt, die Struve (a. a. O.) im V. Kap. aufwirft und bespricht: Lage der Bildgrenze ausserhalb der geometrisch-optischen Begrenzung — Vergrösserung der Bilder von Scheiben in Abhängigkeit von der Grösse der Scheiben und Abhängigkeit dieser Vergrösserung von der Objektivöffnung. Während man nach Strehls Angaben (a. a. O.) geneigt ist, anzunehmen, dass die Bildgrenze mit unendlich werdendem Scheibendurchmesser mit der geometrisch-optischen Begrenzung zusammenfällt, behauptet das Machsche Kriterium, dass sie sich ihr nur auf 1.2 opt. Einheiten nähern kann, dass also auch beliebig grosse Scheiben

durch Beugungswirkung noch vergrössert erscheinen. Bei kleiner werdenden Scheiben tritt die Beugungsvergrösserung ganz allmählig etwas stärker hervor und geht schliesslich bei sehr kleinen Scheiben zu einem Betrag über, so dass der Durchmesser von Fixsternen erreicht wird. Zeichnet man sich die Lichtkurven aller Kreisscheiben deren Radius > 1 O. E. so auf, dass ihr geom.-opt. Randpunkt die Abscisse $x = 0$ erhält und lässt das Zentrum von Scheiben, deren Radius < 1 ist, mit dem Zentrum der Scheibe $r = 1$ zusammenfallen, so liegen die Orte der Machschen Bildgrenzen sehr nahe auf einer Geraden von der Gleichung: $\frac{x}{1.75} + \frac{y}{0.64} = 1$ (siehe Tafel II).

Man sieht dabei aus der Figur, dass Scheiben vom Durchmesser 2 O. E. abwärts sich unter allen Umständen als Fixsterne präsentieren werden, denn das Fehlen der scharf begrenzten Beugungsringe ist hier nur ein unzuverlässiges Unterscheidungsmerkmal. Bei beleuchteten Scheiben treten nach Strehl sogar auch Beugungsringe auf. Auch oberhalb dieses Durchmessers wird die Unterscheidung von Sternen und Scheiben zunächst schwer fallen und hängt offenbar direkt von der Grösse der Beobachtungsfehler der Durchmessermessungen ab. Nimmt man den Betrag dieser Fehler den S. 27 angegebenen in München ausgeführten Messungen entsprechend, etwa gleich 0.6 — 1.0 O. E. an, so erhält man als Grenze der Unterscheidung von Fixsternen und ausgedehnten Scheiben rund einen Durchmesser von **3.0** O. E., d. h. in Winkelmass:

$$d = \frac{37''.2 \cdot 3}{D^{mm}} = \frac{111''.6}{D^{mm}} \text{ oder rund } \frac{\mathbf{112''}}{D^{mm}}$$

worin D^{mm} der in mm ausgedrückte Objektivdurchmesser ist. Sie zeigt sich infolge der Beugungsvergrösserung als Scheibe von **6.3** O. E. Durchmesser, d. h.:

$$d' = \frac{37''.2 \cdot 6.3}{D^{mm}} = \frac{234''.4}{D^{mm}} \text{ oder rund } \frac{\mathbf{235''}}{D^{mm}}$$

Für den Münchner Refraktor von 284 mm Öffnung ergibt sich hieraus

$$d = 0''.39 \qquad d' = 0''.83.$$

Man würde also mit diesem Instrument feststellen können, dass ein sternartiges Gebilde, dessen Durchmesser grösser als $0''.83$ gemessen wird, einer Lichtscheibe von einem wirklichen Durchmesser von mehr als $0''.39$ entspricht. (Die wirklichen Fixsterndurchmesser liegen jedoch weit unter der Unterscheidungsgrenze unserer grössten Fernrohre).

Schliesslich beantworten die erhaltenen Zahlen auch, wie schon bemerkt, die Frage nach einer eventuellen Abhängigkeit von Scheibendurchmesser und Objektivöffnung von einander. Eine Scheibe vom angularen Durchmesser d hat in einem Fernrohr von m mm Öffnung einen Durchmesser von p optischen Einheiten und erscheint in ihm um Δ p opt. Einheiten $= \Delta d''_1$ durch Beugung vergrössert — in einem andern Fernrohr von n mm Öffnung (wo $n > m$ sei) erscheint die Scheibe vom Durchmesser q opt. Einheiten $\left(\text{derart, dass } \frac{q}{p} = \frac{n}{m}\right)$ und durch Beugung um Δ q opt. Einheiten ($\Delta q < \Delta p$) vergrössert, entsprechend einer angularen Vergrösserung von $\Delta d''_2$ wo $\Delta d_2 << \Delta d_1$ wird. Die Differenz der Durchmesser $\Delta d_1 - \Delta d_2$ wird somit eine angebbare, wenn auch bei sehr kleinen Scheiben etwas komplizierte Funktion der Objektivöffnung. Bei

grösseren Scheiben, etwa von p = 100 opt. Einheiten[1]) ab, werden die Verhältnisse sehr einfach, da dann immer $A\ q = A\ p =$ sehr nahe constant = 2.4 O. E. ist. Der Winkelwert der optischen Einheit ist in beiden Instrumenten:

$$\frac{37''.2}{n^{mm}} \text{ bezw. } \frac{37''.2}{m^{mm}}$$

mithin wird:

$$A\ d_1 - A\ d_2 = \delta\ d = 2.4 \times 37''.2 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$$

oder, wenn man wie oben den Objektivdurchmesser wieder mit D^{mm} bezeichnet,

$$\delta\ d = 89''.3 \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}\right)$$

Mit einer Ungenauigkeit in $A\ q$ von 0.4 opt. Einheiten kann man diese Formel auch bis auf p = 10 opt. Einheiten herab ausdehnen.

Die im vorigen gemachten Angaben gestatten eine wenigstens näherungsweise Kontrolle an Messungen des Venusdurchmessers. Struve zitiert aus der Arbeit von Hartwig: Untersuchungen über die Durchmesser der Planeten Venus und Mars u. s. w. (Publ. d. A. G. XV) folgende auf die Entfernungseinheit reduzierten Venusdurchmesser:

Oxforder Heliometer	(D = **191** mm),	Main	**17″.582**
Breslauer „	(D = **76** „),	Hartwig	**17.666**
Airys Micrometer	(D = **189** „),	Kaiser	**17.409**
			17″.55

In diesen Messungen ist die Beugungswirkung in unserem Sinne bereits berücksichtigt, da Hartwig (a. a. O.) in seinen Ausgleichungen als Unbekannte einen konstanten Messungsfehler i in die Bedingungsgleichungen einführt, der sich für die 3 Instrumente ergiebt zu: — 1″.14, — 1″.23, — 0″.8. In den Messungen ist demnach der Venusdurchmesser um diese Beträge zu klein gemessen, d. h. es ist nicht die äussere Bildgrenze sondern, da es sich um Tagesbeobachtungen handelt, die S. 49 erwähnte innere Bildgrenze eingestellt worden. Diesen Nachweis hier im einzelnen zu erbringen, würde zu weit führen, da er direkt eine vollständige neue Ausgleichung der Messungsreihen in Hartwigs Arbeit erfordert. Ich glaube jedoch die Richtigkeit der Bemerkung durch die folgenden Resultate genügend für unseren Zweck zu begründen.

Aus Beobachtungen des Venusdurchganges von 1874 giebt Auwers als Mittelwert für den Venusdurchmesser (Die Venusdurchgänge von 1874 u. 1882, V, 723) **16″.820**

Bei dem Durchgang von 1874 sind ausserdem in Bahia Blanca und Punta Arenas (Auwers a. a. O. S. 724) einige Durchmesserbestimmungen der Venus ausserhalb der Sonnenscheibe gemacht worden, die im Mittel den Wert **17″.31**

ergeben. Es ist zwar nicht streng richtig, diese an schmaler Sichel ausgeführten Messungen hier anzuführen, doch für eine Überschlagsbetrachtung, die hier nur gegeben werden soll, leisten sie gute Dienste und entsprechen dem oben von Hartwig entlehnten Wert mit dem Unterschied, dass sie eine Beugungskorrektion noch nicht enthalten.

Wegen der Sichelgestalt kann man hier nicht die Beugungswirkung einer Scheibe vom ganzen Venusdurchmesser in Rechnung ziehen, sondern muss die einer entsprechend verkleinerten Scheibe betrachten. Nimmt

[1]) 100 opt. Einheiten ist für den Münchner Refraktor = 13″.10.

man an, dass die Hörnerenden in ihrer Wirkung etwa Scheiben von 5″ bis 10″ Durchmesser entsprechen und dass am Tage die innere Bildgrenze eingestellt wird, so erhält man die Beugungsverkleinerung wie folgt: Einem Durchmesser von 5″ bis 10″ entspricht in einem Instrument von 76 mm Öffnung ein Durchmesser in opt. Einheiten von 10—20 opt. E. Für diesen liest man aus der Tafel: II eine durch die Lage der inneren Bildgrenze bedingte Durchmesserverkleinerung von 1.8—2.0 opt. Einheiten ab, der wiederum ein Winkelwert von 0″.88—0″.98 entspricht. Von diesem Betrag, um den die tatsächlichen Messungen zu klein erhalten sind, geht durch die Reduktion auf die Entfernungseinheit der 0 28 Teil, also 0″.24—0″.27, d. h. rund 0″.25 auf das Schlussresultat über.

Vergrössert man nun das Resultat: 17″.31 um diesen Betrag, so erhält man sehr nahe das von Hartwig angegebene Mittel, nämlich 17″.56. Wenn auch die fast gänzliche Übereinstimmung in einer glücklichen Wahl der Vergleichswerte für die Hörnerenden gesucht werden kann, so wird man doch zugeben, dass auch eine sinngemässe andere Wahl darin wenig ändern wird.

Steht die dunkle Venus vor der Sonnenscheibe, so greift durch Beugungswirkung das Bild der hellen Sonnenscheibe in das Venusbild hinein und dieses erscheint verkleinert. In optischen Einheiten beträgt diese Durchmesserverkleinerung 2.4, d. h. bei einem Instrument von 76 mm Öffnung 1″.18. Durch die Reduktion auf die Einheit der Entfernung geht noch 0.26 dieses Wertes ins Resultat ein, also 0″.31. Mit Rücksicht hierauf ist der Auwers'sche Wert auf 17″.13 zu erhöhen.

Es ist von Interesse, gleich hier einzuschalten, dass Auwers aus Versuchen am Modell (a. a. O. S. 724) für den durch Beugung bedingten Korrektionswert 0″.25 fand, also nahe den gleichen Betrag, wie ihn die Rechnung ergibt.

Der jetzt noch zwischen den beiden Durchmesserwerten: im reflektierten Sonnenlicht: 17″.55, als dunkle Scheibe 17″.13 bestehende Unterschied von 0″.42 lässt sich nicht durch Beugung erklären, sondern dürfte wohl auf dem von Auwers hervorgehobenen Einfluss der Venusatmosphäre beruhen.

Die Berücksichtigung des Einflusses der Netzhautstruktur auf die Bildausdehnung liesse sich hier in genau der gleichen Weise durchführen, wie es an den Fixsternen gezeigt wurde. Die Berechnung der über Kreisringen von Zapfenbreite ruhenden Lichtmassen kann dabei mit ausreichender Genauigkeit durch mechanische Quadratur über Kreisringe von der Breite 0.33 O. E. ausgeführt werden. Allein es erübrigt sich m. E. die Durchführung dieser weitschweifigen Rechnungen, da sich einerseits die Resultate aus Analogieüberlegungen genähert voraussagen lassen und da man andrerseits in Spezialfällen, die vielleicht Rücksichtnahme auf diesen Einfluss verlangen könnten, doch für den gerade vorliegenden Scheibendurchmesser besonders rechnen muss.

Aus den Wirkungen, die die Netzhautstruktur an der Bildausdehnung von Fixsternen hervorbringen, folgert man: Bei Anwendung der Normalvergrösserung oder geringerer Vergrösserungen kann der Durchmesser ausgedehnter Scheiben um 1 Zäpfchenbreite = 5 O. E. verringert erscheinen. Bei stärkeren Vergrösserungen wird diese Verringerung entsprechend der abnehmenden Werte des Zapfendurchmessers in O. E. kleiner, so dass bald die Machsche Bildgrenze rein hervortritt. Da nun Messungen in der Regel bei Vielfachen der Normalvergrösserung vor-

genommen werden, so kommt für den Astronomen wohl nur die Machsche Bildgrenze in Frage, um so mehr, als sich die zufälligen Beobachtungsfehler mit dem durch wechselnde Lage des Bildes auf der Netzhaut wechselnden Einfluss der Netzhautstruktur vermischen werden.

Bei sehr kleinen Scheiben ist die Bildgrösse bei Anwendung der Normalvergrösserung natürlich gleich der Zapfengrösse und verhält sich bei wachsender Vergrösserung wie die eines Fixsterns.

Die Frage nach der Bildhelligkeit der Bilder von Scheiben gestaltet sich wegen des erst zu ermittelnden Einflusses der Mitempfindung derart schwierig, dass hier vorläufig nur einige Überlegungen an Stelle der Rechnung Platz finden können. Es hat sich gezeigt, dass bis zu einer Ausdehnung der Fixsternbilder über einen Netzhautbereich von etwa 20 Zapfenbreiten im Durchmesser die Mitempfindung noch so stark wirkt, dass die ganze über dem Bereich ruhende Lichtmasse für die Helligkeitsempfindung an jeder Bildstelle in Betracht kommt. Es ist schon darauf hingewiesen, dass bei immer weiter wachsender Vergrösserung doch schliesslich eine Helligkeitsabnahme des Bildes mit dem Quadrat des Bildradius eintreten muss. Bei Lichtscheiben müssen diese Verhältnisse natürlich auch eintreten und ihre experimentelle Verfolgung wird, wie zu hoffen ist, eine genaue Kenntnis der Mitempfindung vermitteln.

Wenn sich die Mitempfindung wirklich so äussert, wie das Verhalten der Sternbilder vermuten lässt, so muss ihre Wirkung an Scheiben etwa wie folgt sein:

Eine sehr kleine sternartige Scheibe zeigt eine Intensitätsverteilung nach einer Kurve von Tafel II; ihre gesehene Helligkeit ist eine Funktion (log) der gesamten Lichtmasse, die man durch Rotation der Intensitätskurve um die Zentralachse erhält. Eine Vergrösserung der Scheibe verändert die Intensitätskurve wie die Tafel II zeigt, d. h. jede Ordinate wird nach einem bestimmten Gesetz vergrössert. Das Auge „sieht" aber nicht nur dies Anwachsen der Punktintensität, sondern integriert vermöge der Mitempfindung auch über den vergrösserten Bildbereich. Die gesehene Helligkeit müsste also stärker anwachsen mit wachsender Bildvergrösserung als die Intensitätsordinaten in der Figur. Mit weiter anwachsender Grösse der Lichtscheibe integriert eine zentrale Netzhautstelle über die Lichtmasse, die über entfernteren Netzhautstellen liegt mit einem Verkleinerungsfaktor, auf den bei der Besprechung der Fixsternhelligkeit aufmerksam gemacht wurde und schliesslich bei sehr ausgedehnten Scheiben kommt für die von jeder Netzhautstelle gesehene Helligkeit nur noch die Lichtmasse über einem Teile des Bildes in Frage eben über den „Grenzbereich der Mitempfindung." Allmählich wird also bei wachsender Grösse der Lichtscheibe die gesehene Helligkeit so anwachsen wie die durchschnittlichen Intensitätsordinaten in der Figur. Das gleiche Verhalten, das hier von wachsenden Scheiben gemutmasst ist, muss sich zeigen, wenn man eine Lichtscheibe durch Fernrohre mit wachsender Öffnung betrachtet. Es scheint somit, dass hier ein Weg ist, der zur Kenntnis der rätselhaften Mitempfindungsfunktion führt. Die experimentelle Untersuchung kann m. E. durch Beobachtung an wachsenden Lichtscheiben, die man mit Hilfe einer guten Irisblende darstellen und kontrollieren könnte, nicht auf unüberwindliche Schwierigkeiten stossen. Bisher konnte ich leider wegen meiner Militärdienstzeit noch nicht an die Versuche herangehen.

Die hier kurz angedeuteten Dinge erhalten eine Stütze durch folgende Überlegung:

Wenn die Mitempfindung bei Lichtscheiben von untergeordneter Bedeutung wäre, so könnte man aus Struves Tabelle der Zentral- und Randintensitäten (a. a. O. S. 40) ein genähertes Bild des Verhaltens von Lichtscheiben konstruieren. Man sieht aus ihr, dass eine für die feinsten Messungen merkliche Zunahme der Bildhelligkeit aufhört, sobald der Scheibenradius den Wert r = 100 O. E. erreicht, ja dass der Zuwachs an Helligkeit bis zur Helligkeit der unendlich grossen Scheibe (bezw. unendlich grossen Objektivöffnung und entsprechend wachsender Okularvergrösserung) für die Bildradien

	4	6	8	10	12	16	20	50	100 O.E.
	m								m
nur noch:	0.192	113	95	74	58	43	35	14	0,006

Grössenklassen beträgt. Nun ist sicher der mögliche Gewinn von $0^m.1$ Grössenklassen für die Praxis gleichbedeutend mit gleichbleibender Helligkeit, insonderheit, wenn man an die mit wachsender Öffnung wachsende Glasdicke und -absorption der Refraktoren denkt. In praxi hätte also eine leuchtende Scheibe ihre Maximalhelligkeit erreicht, sobald ihr das Fernrohr einen Durchmesser von 14 O. E. verleiht, d. h. im Fernrohr von D^{mm} Objektivöffnung hätte bereits eine Scheibe von d″ die Helligkeit der unendlich grossen Scheibe, wo

$$d'' = \frac{14 \cdot 37''.2}{D^{mm}} = \frac{521''}{D^{mm}}$$

Für den Münchner Refraktor ergibt sich d = 1″.8; das hiesse also, Scheiben von 2″ Durchmesser könnten in grösseren Instrumenten nicht heller gesehen werden als im Münchner Refraktor — ein Resultat, das offenbar den Tatsachen widerspricht und auf die Berücksichtigung der Mitempfindung verweist.

Noch augenfälliger wird das Missverhältnis, wenn man die obige Formel benutzt, um zu erfahren, über welche Fernrohröffnung hinaus kein Helligkeitszuwachs für mittlere Werte unserer Planetendurchmesser möglich ist. Man erhält:

	d″	D^{mm}	Okularvergrösserung
☿	7	79	14
♀	17	31	6
♂	6	83	17
♃	38	14	3
Jupitermond	1,2	434	87
♄	17	31	6
♅	4	145	29
♆	2,5	208	42

Wie diese Zahlen durch Berücksichtigung der Mitempfindung zu korrigieren sind, müssen die anzustellenden Beobachtungen ergeben.

Mit Rücksicht auf die Anwendung von Fernrohren mit verschieden grosser Objektivöffnung lassen sich die erhaltenen Resultate in folgende Sätze zusammenfassen:

1. Wählt man für Fernrohre mit verschiedener Objektivöffnung die Okularvergrösserung jeweilig so, dass die Austrittspupille des Instruments gleich der Eintrittspupille des Auges ist (Normalver-

grösserung), so wächst die Helligkeit von Fixsternen bezw. die Grenze der Sichtbarkeit von Fixsternen bei Tag und Nacht proportional der Öffnungsfläche des Objektivs.

2. Ein Überschreiten der Normalvergrösserung hat nach Beobachtungsergebnissen in den Grenzen 1^{0} bis 20^{0} keinen merkbaren Einfluss auf die Sichtbarkeitsgrenze und damit auf die Helligkeit von Fixsternen. Diese Erscheinung wird erklärt durch den Einfluss der Mitempfindung als Funktion der Primärerregung.

   Bei fehlender und minimaler Primärerregung tritt keine oder unmerkbare Sekundärerregung auf. Bei mässiger Primärerregung erreicht der Einfluss der Mitempfindung ein Maximum in Gestalt einer Reizsummierung über die ganze Fläche des Fixsternbildes. Bei starker Primärerregung konvergiert der Einfluss der Miterreguug wieder gegen Null.

3. Mit Rücksicht auf die Facettenstruktur der Netzhaut ergibt sich für den Durchmesser eines Fixsternbildes der Wert $\frac{1''.2}{R}$ für dunklen Hintergrund; bei hellem Hintergrund schwankt der Bilddurchmesser zwischen den Werten $\frac{1.''2}{R}$ und $\frac{0.''8}{R}$, wenn R jedesmal den Radius des Objektivs in Dezimetern bezeichnet.

4. Für Beobachtung mit blossem Auge folgt die Unmöglichkeit von Fixsternbeobachtungen am Tage, so lange nicht ausgedehnte Abblendung der Bildhelligkeit erfolgt. Selbst unter Anwendung aller erdenklichen Vorsichtsmassregeln muss die Tagessichtbarkeit von Sternen in Ländern mit bevorzugtem Klima als äusserst seltene Erscheinung bezeichnet werden. (Der von Scheiner beschriebene Brunnenversuch ist in bezug auf Leistungsfähigkeit etwa einem Fernrohr von 2 cm Offnung zu vergleichen).

5. Die Bilder von Lichtscheiben erscheinen durch Beugung bei dunklem Hintergrund vergrössert, bei hellem Hintergrund verkleinert nach Massgabe der durch Machs Kriterium errechneten Bildgrenzen. Die Netzhautstruktur kann nur bei geringen Okularvergrösserungen oder sehr kleiner Objektgrösse von erheblichem, leicht angebbarem Einfluss werden.

6. Die Helligkeit der Bilder von Lichtscheiben kleiner bis mässig grosser Ausdehnung hängt stark von der Mitempfindung ab und kann erst nach ausgedehnten Untersuchungen dieser angegeben werden.

7. Die Helligkeitsmessungen an Modellscheiben (etwa mit einem Zöllner'schen Photometer) lassen ein zuverlässiges Resultat über den Charakter der Mitempfindungsfunktion erwarten.

Zum Schluss spreche ich Herrn Geheimrat Prof. Dr. von Seeliger für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine mancherlei gesprächsweisen Mitteilungen meinen herzlichen Dank aus.

Lebenslauf.

Ich, Christoph August Kühl, wurde geboren am 13. März 1885 als Sohn des Kaufmanns August Kühl zu Heiligenhafen in Holstein, wurde evang.-luther. erzogen, besuchte vom 6—11. Lebensjahre die Volksschule zu Heiligenhafen, vom 11.—15. Jahre die Dr. Reimann'sche Realschule zu Lübeck, darauf das Realgymnasium des Katharineums zu Lübeck, wo ich Ostern 1903 absolvierte. Von Ostern 1903 bis Ostern 1905 studierte ich in Göttingen, darauf in München Astronomie, Mathematik und Physik. Seit Ostern 1907 war ich als Hilfsarbeiter an der K. Sternwarte zu München beschäftigt.

Berichtigung.

Infolge einer erst nach dem Druck bemerkten Verzerrung des Millimeterpapiers sind die Ordinaten der Tafel II in der Nähe der geom.-opt. Grenze bis zu 1.5 mm fehlerhaft. Die Resultate werden nicht davon betroffen.